

## DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XX.

---

*I. Theorie der Dispersion;  
von L. Lorenz in Kopenhagen.*

---

Da sowohl die Gesetze der Lichtbewegung in einem vollkommen homogenen und durchsichtigen Mittel, als auch die Gesetze der Bewegungen beim Uebergang von einem solchen Mittel in ein anderes ähnliches bekannt sind, so wird es möglich sein, ohne irgend eine Hypothese die Lichtbewegungen im Inneren eines nicht homogenen, überall vollkommen durchsichtigen Mittels zu berechnen, wenn nur die Lichtgeschwindigkeit, die einzige Grösse, worauf es hier ankommt, in jedem Punkte des Mittels bekannt ist. Ich werde es hier versuchen, eine solche Berechnung auszuführen, um dadurch das Gesetz der gewöhnlichen Dispersion eines isotropen durchsichtigen Körpers, namentlich die Abhängigkeit derselben von der Wellenlänge und der Körperdichte abzuleiten.

Die allgemeinen, einer variablen Fortpflanzungsgeschwindigkeit entsprechenden Gesetze der Lichtbewegungen habe ich schon vor zwanzig Jahren in meiner Theorie des Lichtes entwickelt. Ich werde im Folgenden, ohne mich auf meine früheren Arbeiten zu beziehen, diese allgemeinen Gesetze aufs neue und in einfacherer Weise ableiten.

Da es sich ferner darum handelt, die Lichtbewegungen im Inneren eines Körpers zu berechnen, so muss eine bestimmte Constitution des Körpers vorausgesetzt werden. Es kann wohl keinem Zweifel mehr unterliegen, dass die Körper aus discreten Atomen oder Moleculen bestehen, und aus meiner Theorie der Refractionsconstante, die sich in schöner Uebereinstimmung mit der Erfahrung gezeigt hat, geht ferner hervor, dass ein Theil des Lichtmediums bei allen physischen

Zustandsänderungen des Körpers mit den Atomen unveränderlich verbunden ist, während in dem übrigen Zwischenraume das Licht mit derselben Geschwindigkeit wie im leeren Raume oder im Weltraume sich fortpflanzt. Im übrigen bleibt ein weites Feld für Hypothesen in Betreff der Gruppierung der Atome und der Abhängigkeit des Lichtmittels von dieser Gruppierung noch offen, allein für den Anfang muss die Berechnung sich auf die möglichst einfachen Voraussetzungen beschränken. Ich nehme demnach an, dass die Geschwindigkeit des Lichtes in der Nähe der Atome, die ich als mathematische Punkte auffasse, eine Function der Entfernung vom Atome ist, welche Function für alle Atome des Körpers die nämliche bleibt, dass ferner in grösseren Entfernungen die Geschwindigkeit derjenigen im leeren Raume gleich ist, und endlich, dass die Atome beliebig, jedoch den Bedingungen der Isotropie Genüge leistend, gelagert sind.

Man wird hier den Einwand machen können, dass die inneren Bewegungen der Atome eine festgestellte Thatsache sind, welche in Betracht genommen werden muss. Nach den für jetzt gangbaren Vorstellungen sind diese Bewegungen doppelter Art, theils solche, die als mit der Wärme identisch betrachtet werden, theils andere, die im Einklange mit den Schwingungen des Lichtes vor sich gehen und als Ursache des Absorptions- und Emissionsvermögens der Körper angenommen werden.

Obgleich ich in keiner Weise die Identität der inneren molecularen Bewegungen mit der Wärme als bewiesen erachte, so bezweifle ich die Existenz solcher Bewegungen gar nicht, allein die hier in Rede kommenden Geschwindigkeiten werden im Vergleich mit derjenigen des Lichtes immerhin so klein sein, dass sie auf die Lichtbewegungen keinen merklichen Einfluss haben können. Die einzige bekannte Spur einer Einwirkung der Körperbewegung auf die Lichtbewegung (von dem sehr zweifelhaften, dreiunddreissig Jahre alten Versuche Fizeau's über den Durchgang des Lichtes durch strömendes Wasser abgesehen) ist die Aberration der Sterne, allein die molecularen Geschwindigkeiten sind noch viel kleiner als diejenige der Erde im Weltraume.



Die andere Art von Bewegungen bildet die Grundlage der neueren Arbeiten über die Absorption und Emission des Lichtes. Man hätte gegen die Annahme dieser Bewegungen den Einwand machen können, dass, wenn die Atome eines Körpers mit dem Lichte im Einklange 500 Billionen Schwingungen in der Secunde machen sollen, so ungeheure Kräfte im Inneren des Körpers vorhanden sein müssten, dass eine Verschiebung der in einem Gramm enthaltenen Atome um einen Billionstel Millimeter aus der Gleichgewichtslage einen Druck von einer Billion Kilogramm erfordern würde. Die Hypothese ist doch nicht deshalb erfunden, um irgend eine unmittelbar vom Licht erzeugte Massenbewegung zu erklären, da wir überhaupt keine solche Wirkungen von dem Lichte kennen, sondern nur zur Erklärung gewisser optischer Erscheinungen, die auch vielleicht in anderer Weise erklärt werden können. Wie dem auch sein mag, in jedem Falle wird es zunächst nothwendig sein, die Mitschwingungen des die Atome umgebenden Lichtmittels zu berechnen, unter der Voraussetzung, dass die Atome selbst in Ruhe sind. Wenn es sich alsdann nothwendig zeigen sollte, die Mitschwingungen der Atome in die Rechnung einzuführen, so würde man immerhin nachher diesen nächsten Schritt machen können.

Die allgemein anerkannten Gesetze der Lichtschwingungen eines isotropen und vollkommen homogenen Mittels können bekanntlich durch die folgenden Gleichungen dargestellt werden:

$$(1) \quad \begin{cases} A_2 \xi = \frac{d^2 \xi}{a^2 dt^2}, & A_2 \eta = \frac{d^2 \eta}{a^2 dt^2}, & A_2 \zeta = \frac{d^2 \zeta}{a^2 dt^2}, \\ \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0 = 0, \end{cases}$$

wo die Componenten der Schwingungen durch  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  ausgedrückt sind, und zur Abkürzung:

$$A_2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2},$$

gesetzt ist. Es bedeutet hier  $a$  die constante Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes.

Beim Uebergang von einem solchen Mittel in ein an-

deres ähnliches, in welchem die Geschwindigkeit eine andere ist, befolgt der Lichtstrahl das bekannte Sinusgesetz, während nach den von Fresnel entdeckten Gesetzen die Amplituden der einfallenden, gebrochenen und reflectirten Strahlen sich wie:

$$1 : \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} : \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)},$$

wenn die Schwingungen des einfallenden Lichtes in der Einfallsebene liegen, und wie:

$$1 : \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} : - \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)},$$

wenn die Schwingungen des einfallenden Lichtes senkrecht gegen die Einfallsebene sind. Hier ist  $\alpha$  der Einfallswinkel und  $\beta$  der Brechungswinkel. Die Polarisationssebene ist dabei senkrecht zur Schwingungsrichtung angenommen.

Die von mir entwickelte Theorie geht allein davon aus, dass diese Gesetze allgemein gültig sind, in der Weise, dass alle Abweichungen von diesen Gesetzen nur davon herrühren, dass kein Körper vollkommen homogen ist, und dass der Uebergang von einem Mittel in ein anderes allmählich, ohne Unterbrechung der Stetigkeit, vor sich geht.

Die obigen Gesetze können auch in anderer Weise ausgedrückt werden. Es sei die Coordinatenebene  $yz$  die Grenzfläche der beiden Mittel. Alsdann geht aus den angenommenen Gesetzen hervor, dass die vier Grössen:

$$\eta, \quad \zeta, \quad \frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}, \quad \frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz},$$

an beiden Seiten der Grenzfläche gleiche Werthe haben. Aus diesem Satze können auch umgekehrt die genannten Gesetze sehr leicht abgeleitet werden. Man sieht also ein, dass z. B.:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} \right) \text{ und } \frac{d}{dz} \left( \frac{d\eta}{dz} - \frac{d\xi}{dy} \right),$$

überall, auch für  $x = 0$ , endlich sind. Durch Addition dieser beiden Grössen ergibt sich:

$$A_2 \eta - \frac{\partial \theta}{\partial y}.$$

Dieser Ausdruck hat also überall einen endlichen Werth. Man wird demnach, der zweiten der Gleichungen (1) zufolge, gemeinschaftlich für beide Mittel die Gleichung:

$$A_2 \eta - \frac{d\theta}{dy} = \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 \eta}{dt^2}$$

bilden können, indem durch  $\omega$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die für  $x < 0$  und für  $x > 0$  verschiedene Werthe annimmt, ausgedrückt ist. In ganz ähnlicher Weise kann aus den obigen Grenzbedingungen die Gleichung:

$$A_2 \zeta - \frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 \zeta}{dt^2},$$

abgeleitet werden und, da die  $yz$ -Ebene willkürlich als Grenzebene gewählt ist, durch Umsetzung der Buchstaben:

$$A_2 \xi - \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 \xi}{dt^2}.$$

In dieser Weise sind also alle Gesetze der Lichtbewegungen durch drei partielle Differentialgleichungen ausgedrückt, aus welchen Gleichungen wiederum die Gesetze, von welchen wir ausgegangen sind, leicht abgeleitet werden können. Die gewonnenen Differentialgleichungen müssen auch gültig bleiben, wenn  $\omega$  als eine beliebige Function von  $x$ ,  $y$  und  $z$  betrachtet wird. Sie enthalten eigentlich nichts Neues, und man hätte sie entbehren können, allein für die praktische Rechnung sind sie von grossem Belange.

Beschränken wir uns auf eine einfache Wellenbewegung mit gegebener Schwingungsdauer, so kann die Abhängigkeit von der Zeit  $t$  durch den gemeinsamen complexen Factor  $e^{ikt}$  ausgedrückt werden. Wenn:

$$\frac{k^2}{\omega^2} = \mu$$

gesetzt wird, so gehen die obigen Differentialgleichungen über in:

$$(2) \quad \begin{cases} A_2 \xi - \frac{d\theta}{dx} + \mu \xi = 0, & A_2 \eta - \frac{d\theta}{dy} + \mu \eta = 0, \\ A_2 \zeta - \frac{d\theta}{dz} + \mu \zeta = 0. \end{cases}$$

Ich werde zunächst die Lichtbewegungen in einem aus concentrischen kugelförmigen Schichten bestehenden Mittel berechnen, in welchem die Geschwindigkeit des Lichtes eine

Function der Entfernung  $r$  vom Mittelpunkte ist. Innerhalb jeder dieser Schichten wird  $\mu$  constant angenommen, während beim Uebergange aus einer Schicht zur anderen  $\mu$  andere Werthe annimmt. Auch in dem Falle, dass  $\mu$  eine stetige Variable ist, wird es offenbar erlaubt sein, diese Supposition festzuhalten, da immerhin die Dicke der Schichten beliebig klein gewählt werden können.

Wird:  $x\xi + y\eta + z\zeta = \varrho$   
gesetzt, und werden die Gleichungen (2) bez. mit  $x$ ,  $y$  und  $z$  multipliziert, so bekommt man durch Addition:

$$(3) \quad \Delta_2 \varrho - \frac{dr^2 \theta}{r dr} + \mu \varrho = 0.$$

Dieselben Gleichungen (2) nach  $x$ ,  $y$  und  $z$  differenziert und addirt, geben:

$$(4) \quad \mu \theta + \frac{d\mu}{dr} \cdot \frac{\varrho}{r} = 0.$$

Während  $\mu$  sich in den Grenzflächen zweier Schichten unstetig ändert, verlaufen gewisse Functionen der Schwingungscomponenten überall stetig. So geht aus der Gleichung (3) hervor, dass:

$$\frac{d^2 r \varrho}{r dr^2} - \frac{dr^2 \theta}{r dr}$$

überall endlich ist, woraus folgt, dass:

$$\frac{dr \varrho}{dr} - r^2 \theta,$$

eine stetige Function ist, die also an den beiden Seiten jeder Grenzfläche, in welcher  $\mu$  sich unstetig ändert, denselben Werth hat. Ich werde dieses kurz durch die Bezeichnung:

$$\left[ \frac{dr \varrho}{dr} - r^2 \theta \right] = 0,$$

ausdrücken. Da ferner an beiden Seiten der Grenzfläche  $\mu$  constant, und demnach  $\theta = 0$  ist, so reducirt sich diese Grenzbedingung zu:

$$(5) \quad \left[ \frac{dr \varrho}{dr} \right] = 0.$$

Eine andere Grenzbedingung ergibt sich daraus, dass:

$$\theta - \frac{d}{dr} \cdot \frac{\varrho}{r}$$

eine überall endliche Grösse sein muss, indem nämlich die Derivirten nach  $r$  einander aufheben. Wenn der in der Gleichung (4) gegebene Werthe von  $\theta$  eingesetzt wird, geht der obige Ausdruck in:

$$-\frac{1}{\mu} \frac{d}{dr} \frac{\mu \varrho}{r}$$

über, woraus folgt, dass  $\mu \varrho$  eine stetige Function ist, und dass also für alle Grenzflächen:

$$(6) \quad [\mu \varrho] = 0$$

ist. Diese beiden Grenzbedingungen in Verbindung mit der innerhalb jeder Schicht, in welcher  $\mu$  constant ist, geltenden Differentialgleichung:

$$(7) \quad \Delta_2 \varrho + \mu \varrho = 0,$$

genügen, um  $\varrho$  zu bestimmen.

Wenn in der ersten der Gleichungen (2)  $x = r \cos \varphi$  gesetzt wird, so ersieht man, dass:

$$\frac{d^2 r \xi}{dr^2} - \frac{d\theta}{dr} r \cos \varphi + \frac{d\theta}{d\varphi} \sin \varphi$$

eine überall endliche Grösse ist. Da ferner, wie oben gezeigt ist:

$$\frac{d^2 r \varrho}{dr^2} - \frac{dr^2 \theta}{dr} \text{ und: } \theta - \frac{d}{dr} \frac{\varrho}{r}$$

ebenfalls überall endliche Grössen sind, so leitet sich hieraus ab, dass:

$$\frac{d^2 r \xi}{dr^2} - \cos \varphi \frac{d^2 \varrho}{dr^2} + \sin \varphi \frac{d^2}{dr d\varphi} \frac{\varrho}{r}$$

überall endlich ist. Nachdem dieser Ausdruck in:

$$\frac{d^2 r \xi}{dr^2} - \frac{d}{dr} \left( \frac{d\varrho}{dx} \right)$$

umgestaltet ist, ergibt sich hieraus die Grenzbedingung:

$$(8) \quad \left[ \frac{dr \xi}{dr} - \frac{d\varrho}{dx} \right] = 0.$$

Da ferner der letztere Ausdruck und also auch:

$$\frac{dr \xi}{dr} - \frac{d\varrho}{dr} \cos \varphi$$

überall endlich ist, so bekommt man als zweite Grenzbedingung:

$$(9) \quad [r^2 \xi - \varrho x] = 0.$$

In Analogie mit diesen beiden Gleichungen ergibt sich:

$$(10) \quad \begin{cases} \left[ \frac{dr}{dr} \eta - \frac{d\varrho}{dy} \right] = 0, & [r^2 \eta - \varrho y] = 0, \\ \left[ \frac{dr}{dr} \zeta - \frac{d\varrho}{dz} \right] = 0, & [r^2 \zeta - \varrho z] = 0, \end{cases}$$

welchen Grenzbedingungen sich die innerhalb der Grenzflächen geltenden Differentialgleichungen:

$$(11) \quad \Delta_2 \xi + \mu \xi = 0, \quad \Delta_2 \eta + \mu \eta = 0, \quad \Delta_2 \zeta + \mu \zeta = 0,$$

anschlüssen. Ausserdem soll hier  $\theta = 0$  sein.

Die Functionen  $\varrho, \xi, \eta, \zeta$  können in Reihen nach Kugelfunctionen entwickelt werden. Ich werde indessen hier eine von der gewöhnlichen abweichende Form benutzen, wodurch eine bedeutende Erleichterung in der Berechnung gewonnen wird. Es werde:

$$V_n^m = \frac{d^n}{dx^{n-m} dy^m} \frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

gesetzt. Ich beschränke mich auf den Fall, dass  $\varrho, \xi$  und  $\eta$  gerade Functionen von  $z$  sind,  $\zeta$  eine ungerade Function von  $z$  ist, werde die folgenden Reihenentwickelungen einführen:

$$(12) \quad \varrho = \sum \varrho_n^m V_n^m, \quad \xi = \sum \xi_n^m V_n^m, \quad \eta = \sum \eta_n^m V_n^m, \quad \zeta = \sum \zeta_n^m \frac{d}{dz} V_{n-1}^m,$$

wo die Summenzeichen bedeuten, dass  $m$  alle ganze Werthe von  $m=0$  bis  $m=n$  oder in der letzten Reihe bis  $m=n-1$ , und  $n$  alle ganze positiven Werthe von  $n=0$  bis  $n=\infty$  durchlaufen. Die Coëfficienten  $\varrho_n^m, \xi_n^m, \eta_n^m, \zeta_n^m$  sind Functionen von  $r$  allein. Ferner sei bemerkt, dass die Derivirten höherer Ordnung als erster nach  $z$ , wenn solche im Laufe der Rechnung vorkommen, mittelst der Gleichung:

$$\Delta_2 V_n^m = 0,$$

zu eliminiren sind. Ausserdem ergibt sich aus der Definition von  $V_n^m$ :

$$\frac{dV_n^m}{dr} = -\frac{n+1}{r} V_n^m.$$

Wenn die Reihenentwickelungen in die Gleichungen (7) und (11) eingesetzt werden, so ersieht man, dass die Coëfficienten  $\varrho_n^m, \xi_n^m, \eta_n^m, \zeta_n^m$  der Differentialgleichung:

$$(13) \quad \frac{d^2 f_n}{dr^2} - \frac{2n}{r} \frac{df_n}{dr} + \mu f_n = 0$$

genügen müssen. Zwei particuläre Integrale dieser Gleichung sind:

$$(14) \quad \begin{cases} \varphi_n = r^{2n+1} \left( 1 - \frac{\mu r^2}{2(2n+3)} + \frac{\mu^2 r^4}{2 \cdot 4(2n+3)(2n+5)} - \dots \right) \\ \psi_n = 1 + \frac{\mu r^2}{2(2n-1)} + \frac{\mu^2 r^4}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} + \dots \end{cases}$$

Man wird demnach:

$$(15) \quad \begin{cases} \varrho_n^m = k_n^m \varphi_n + x_n^m \psi_n, & \xi_n^m = a_n^m \varphi_n + \alpha_n^m \psi_n, \\ \nu_n^m = b_n^m \varphi_n + \beta_n^m \psi_n, & \zeta_n^m = c_n^m \varphi_n + \gamma_n^m \psi_n \end{cases}$$

setzen können, indem alle diese neu eingeführten Coëfficienten, die in derselben Weise wie  $\mu$  innerhalb jeder Schicht constant sind, von einer Schicht zur anderen verschiedene Werthe annehmen.

Aus den Gleichungen (14) ergibt sich:

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{d\varphi_n}{rdr} = (2n+1)\varphi_{n-1}, & \frac{d\psi_n}{rdr} = \frac{\mu}{2n-1}\psi_{n-1}, \\ r^{2n+2} \frac{d}{dr} \frac{\varphi_n}{r^{2n+1}} = -\frac{\mu}{2n+3}\varphi_{n+1}, \\ r^{2n+2} \frac{d}{dr} \frac{\psi_n}{r^{2n+1}} = -(2n+1)\psi_{n+1}. \end{cases}$$

Ferner gehen aus der Definition von  $V_n^m$  die Gleichungen:

$$xV_0^0 + r^2V_1^0 = 0, \quad yV_0^0 + r^2V_1^1 = 0$$

hervor. Wird die erste Gleichung  $n-m$  mal nach  $x$  und  $m$  mal nach  $y$ , und ebenso die zweite Gleichung  $n-m+1$  mal nach  $x$  und  $m-1$  mal nach  $y$  differenziert, so bekommt man zwei Gleichungen, die leicht in die folgenden transformirt werden können:

$$(17) \quad \begin{cases} (2n+1)xV_n^m = -r^2V_{n+1}^m - (n^2-m^2)V_{n-1}^m \\ \quad \quad \quad + m(m-1)V_{n-1}^{m-2} \\ (2n+1)yV_n^{m-1} = -r^2V_{n+1}^m + (n-m+1)(n-m)V_{n-1}^m \\ \quad \quad \quad - (2n-m+1)(m-1)V_{n-1}^{m-2}. \end{cases}$$

In ähnlicher Weise und mit Beachtung der letzteren Gleichungen erhält man:



$$(18) \left\{ \begin{aligned} (2n+1) z V_n^m &= -r^2 \frac{d}{dz} V_n^m + (n-m)(n-m-1) \frac{d}{dz} V_{n-2}^m \\ &+ m(m-1) \frac{d}{dz} V_{n-2}^{m-2}. \end{aligned} \right.$$

Wenn ferner diese Gleichung nach  $z$  differenziert und  $n-1$  anstatt  $n$  eingesetzt wird, so ergibt sich:

$$(19) \left\{ \begin{aligned} (2n+1) z \frac{d}{dz} V_{n-1}^m &= r^2 V_{n+1}^{m+2} + r^3 V_{n+1}^m \\ &- (n-m-1)(n-m-2) V_{n-1}^{m+2} \\ &- ((n-m-1)^2 + n + m^2) V_{n-1}^m - m(m-1) V_{n-1}^{m-2}. \end{aligned} \right.$$

Die vier Grössen  $\varrho$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  sind durch die Gleichungen:

$$x\xi + y\eta + z\zeta = \varrho, \quad \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0$$

miteinander verknüpft. Die hieraus entspringenden Beziehungen zwischen den Coëfficienten der Reihen (12) können aus den folgenden Reihenentwickelungen, wo  $s$  eine beliebige Zahl ist, abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} \frac{dr^s x\xi}{dr} - r^{s+1} \frac{d\xi}{dx} &= \sum \xi_n^m ((s-n)r^{s-1} x V_n^m - r^{s+1} V_{n+1}^m) \\ \frac{dr^s y\eta}{dr} - r^{s+1} \frac{d\eta}{dy} &= \sum \eta_n^m ((s-n)r^{s-1} y V_n^m - r^{s+1} V_{n+1}^{m+1}) \\ \frac{dr^s z\zeta}{dr} - r^{s+1} \frac{d\zeta}{dz} &= \sum \zeta_n^m ((s-n)r^{s-1} z \frac{d}{dz} V_{n-1}^m + r^{s+1} (V_{n+1}^m + V_{n+1}^{m+2})). \end{aligned}$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen bekommt man auf der linken Seite:

$$\frac{dr^s \varrho}{dr} = \sum \frac{dr^{s-n-1} \varrho_n^m}{dr} r^{n+1} V_n^m.$$

Auf der rechten Seite werden die oben gefundenen Werthe von  $x V_n^m$ ,  $y V_n^m$  und  $z (d/dz) V_{n-1}^m$  eingesetzt, wonach an beiden Seiten die Coëfficienten von  $V_n^m$  einander gleich gesetzt werden. In dieser Weise findet man, wenn  $s = n+1$  eingesetzt wird:

$$(20) \quad \frac{2n-1}{2n+1} \frac{d\varrho_n^m}{dr} + \xi_{n-1}^m + \eta_{n-1}^{m-1} - \zeta_{n-1}^m - \zeta_{n-1}^{m-2} = 0$$

und, wenn  $s = -n$  gesetzt wird:

$$(20) \left\{ \begin{aligned} & \frac{2n+3}{2n+1} r^{2n+2} \frac{d}{dr} \frac{\varrho_n^m}{r^{2n+1}} + (m+2)(m+1) \xi_{n+1}^{m+2} - ((n+1)^2 - m^2) \xi_{n+1}^m \\ & - (m+1)(2n-m+1) \eta_{n+1}^{m+1} + (n-m+2)(n-m+1) \eta_{n+1}^{m-1} \\ & - (m+2)(m+1) \zeta_{n+1}^{m+2} - ((n-m)^2 + m^2 + n+1) \zeta_{n+1}^m \\ & - (n-m+2)(n-m+1) \zeta_{n+1}^{m-2} \end{aligned} \right\} = 0.$$

Wenn in diesen Gleichungen die in den Gleichungen (15) gegebenen Werthe von  $\varrho_n^m$ , u. s. w. eingesetzt werden, so ergibt sich mittelst der Gleichungen (16):

$$(22) \left\{ \begin{aligned} & (2n-1)k_n^m + a_{n-1}^m + b_{n-1}^{m-1} - c_{n-1}^m - e_{n-1}^{m-2} = 0 \\ & \frac{\mu}{2n+1} x_n^m + \alpha_{n-1}^m + \beta_{n-1}^{m-1} - \gamma_{n-1}^m - \gamma_{n-1}^{m-2} = 0. \end{aligned} \right.$$

$$(23) \left\{ \begin{aligned} & -\frac{\mu}{2n+1} k_n^m + (m+2)(m+1) a_{n+1}^{m+2} - ((n+1)^2 - m^2) a_{n+1}^m \\ & - (m+1)(2n-m+1) b_{n+1}^{m+1} + (n-m+2)(n-m+1) b_{n+1}^{m-1} \\ & - (m+2)(m+1) c_{n+1}^{m+2} - ((n-m)^2 + m^2 + n+1) c_{n+1}^m \\ & - (n-m+2)(n-m+1) c_{n+1}^{m-2} \\ & - (2n+3) x_n^m + (m+2)(m+1) \alpha_{n+1}^{m+2} - ((n+1)^2 - m^2) \alpha_{n+1}^m \\ & - (m+1)(2n-m+1) \beta_{n+1}^{m+1} + (n-m+2)(n-m+1) \beta_{n+1}^{m-1} \\ & - (m+2)(m+1) \gamma_{n+1}^{m+2} - ((n-m)^2 + m^2 + n+1) \gamma_{n+1}^m \\ & - (n-m+2)(n-m+1) \gamma_{n+1}^{m-2} \end{aligned} \right\} = 0.$$

Ausser diesen Beziehungen zwischen den Coëfficienten, die innerhalb jeder Schicht, in welcher  $\mu$  constant ist, auch constant bleiben, müssen die zwischen den verschiedenen Coëfficienten je zweier angrenzender Schichten stattfindenden Beziehungen aufgesucht werden. Es seien die einer angrenzenden inneren Schicht entsprechenden Coëfficienten durch einen Accent bezeichnet. Alsdann geht aus den Gleichungen (5) und (6) hervor, wenn  $r$  der Halbmesser der Grenzfläche ist:

$$(24) \left\{ \begin{aligned} & k_n^m \frac{dr^{-n} \varphi_n}{dr} + x_n^m \frac{dr^{-n} \psi_n}{dr} = k_n'^m \frac{dr^{-n} \varphi_n'}{dr} + x_n'^m \frac{dr^{-n} \psi_n'}{dr}, \\ & \mu (k_n^m \varphi_n + x_n^m \psi_n) = \mu' (k_n'^m \varphi_n' + x_n'^m \psi_n'), \end{aligned} \right.$$

indem  $\varphi_n'$  und  $\psi_n'$  die nämlichen Functionen wie  $\varphi_n$  und  $\psi_n$ , nur mit Aenderung von  $\mu$  in  $\mu'$ , sind.

Wenn die Grenzfläche diejenige ist, die dem Mittelpunkt am nächsten liegt, so gehören die Coëfficienten  $k_n^m$  und  $\alpha_n^m$  der centralen Kugelschicht an. Es müssen aber hier alle Coëfficienten  $\alpha_n^m$  verschwinden, da im entgegengesetzten Falle im Mittelpunkte selbst der Werth von  $\rho$  unendlich sein würde, und aus den beiden Gleichungen (24) kann ferner  $k_n^m$  eliminirt werden. Von hier aus kann zur nächsten Grenzfläche gegangen werden und so weiter, woraus hervorgeht, dass für jede beliebige Schicht eine Gleichung:

$$(25) \quad \alpha_n^m = p_n k_n^m$$

gefunden werden kann, indem  $p_n$  eine allein von  $n$  und von den Werthen, die  $\mu$  und die Halbmesser der Grenzflächen innerhalb der betrachteten Schicht durchlaufen, abhängige Function ist.

Ebenfalls ergeben sich aus den Gleichungen (8), (9) und (10) durch Einsetzung der Reihenentwicklungen und Vergleichung der Coëfficienten von  $V_n^m$  sechs Gleichungen, die sich mittelst der Gleichungen (20) und (21) auf die folgenden zwei Grenzbedingungen zurückführen lassen:

$$\begin{aligned} & [m(\xi_n^m - \zeta_n^m) - (n - m + 1)(\eta_n^{m-1} - \zeta_n^{m-2})] = 0 \\ & \left[ \frac{d}{dr} (m(\xi_n^m - \zeta_n^m) - (n - m + 1)(\eta_n^{m-1} - \zeta_n^{m-2})) \right] = 0. \end{aligned}$$

Wird zur Abkürzung:

$$(26) \quad \begin{cases} m(a_n^m - c_n^m) - (n - m + 1)(b_n^{m-1} - c_n^{m-2}) = s_n^m, \\ m(\alpha_n^m - \gamma_n^m) - (n - m + 1)(\beta_n^{m-1} - \gamma_n^{m-2}) = \sigma_n^m \end{cases}$$

gesetzt, so bekommt man mit den oben eingeführten Bezeichnungen:

$$(27) \quad \begin{cases} s_n^m \varphi_n + \sigma_n^m \psi_n = s_n^m \varphi_n' + \sigma_n^m \psi_n' \\ s_n^m \frac{d\varphi_n}{dr} + \sigma_n^m \frac{d\psi_n}{dr} = s_n^m \frac{d\varphi_n'}{dr} + \sigma_n^m \frac{d\psi_n'}{dr}, \end{cases}$$

woraus in ganz ähnlicher Weise wie oben die Gleichung:

$$(28) \quad \sigma_n^m = q_n s_n^m$$

hervorgeht, indem  $q_n$  allein von  $n$  und von den Werthen von  $\mu$  und  $r$  innerhalb der betrachteten Schicht abhängig ist.

Ich gehe jetzt zur Untersuchung der Lichtbewegungen im Inneren eines isotropen Körpers über, indem ich, wie schon in der Einleitung bemerkt, die Atome als Punkte betrachte, um welche sich bis zu einer gewissen Entfernung das Lichtmedium in concentrischen Schichten lagert, während ausserhalb dieser Entfernung, die kleiner angenommen wird als die Hälfte der mittleren Entfernung zweier Nachbaratome, die Geschwindigkeit des Lichtes derjenigen des leeren Raumes gleich ist.

Es sei  $2\delta$  die mittlere Entfernung zweier Nachbaratome. In der Entfernung  $\delta$  von einem der Atome seien die Schwingungen des Lichtes parallel zur  $y$ -Axe, und die Bewegung pflanze sich in der Richtung der  $x$ -Axe fort. Ich nehme demnach:

$$(29) \quad \text{für } r = \delta, \quad \xi = 0, \quad \zeta = 0, \quad \eta = e^{(kt-lx)i} F$$

an, indem  $F$  eine Function ist, die sich periodisch von einem Atom zum anderen wiederholt. Die letztere Formel stellt also eine Wellenbewegung dar, die sich mit der Geschwindigkeit  $k/l$  im Körper fortpflanzt.

Betrachten wir, um die Eigenschaften der Function  $F$  festzustellen, zwei um  $2\delta$  voneinander entfernte Atome. Eine durch diese Atome gezogene Gerade schneide die beiden sich tangirenden Kugelflächen, deren Mittelpunkte die Atome sind, und deren Halbmesser gleich  $\delta$  ist, in den Punkten  $A$ ,  $B$  und  $C$ . Die Werthe der Function  $F$  in dieser Geraden können alsdann durch eine Curve dargestellt werden, welche von  $A$  bis  $B$  und von  $B$  bis  $C$  sich genau wiederholt, in der Weise, dass  $F$  in  $A$  und  $B$  gleiche Werthe hat, und dass die Tangenten der Curve in  $A$  und  $B$  parallel sind. Da  $r$  positiv zu beiden Seiten des Mittelpunktes gerechnet wird, so müssen also die Werthe von  $dF/dr$  in  $A$  und  $B$  gleich gross, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen gerechnet werden.

Wir haben:

$$e^{kti} F = e^{lxi} \eta = e^{lxi} \sum \eta_n^m V_n^m,$$

in welcher Reihe die Glieder in zwei diametral entgegengesetzten Punkten gleich gross und mit denselben Vorzeichen

für gerade  $n$ , mit entgegengesetztem Vorzeichen für ungerade  $n$  versehen sind. Man bekommt demnach für  $r = \delta$ :

$$\begin{aligned} & e^{ixi} \Sigma (\eta_{2n}^m V_{2n}^m + \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m) \\ & = e^{-ixi} \Sigma (\eta_{2n}^m V_{2n}^m - \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m) \\ & \frac{d}{dr} \left( e^{ixi} \Sigma (\eta_{2n}^m V_{2n}^m + \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m) \right. \\ & \quad \left. + e^{-ixi} \Sigma (\eta_{2n}^m V_{2n}^m - \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m) \right) = 0, \end{aligned}$$

welche Gleichungen in:

$$(30) \begin{cases} (e^{ixi} - e^{-ixi}) \Sigma \eta_{2n}^m V_{2n}^m + (e^{ixi} + e^{-ixi}) \Sigma \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m = 0, \\ (e^{ixi} + e^{-ixi}) \frac{d}{dr} \Sigma \eta_{2n}^m V_{2n}^m + (e^{ixi} - e^{-ixi}) \frac{d}{dr} \Sigma \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m = 0 \end{cases}$$

umgestaltet werden können.

Diese für den Tangirungspunkt  $B$  geltenden Gleichungen sind überhaupt für alle Punkte, in welchen die Kugelfläche  $r = \delta$  von einer anderen ähnlichen tangirt wird, gültig. Da indessen diese Tangirungspunkte zufällig liegen und in den isotrop angenommenen Körper mit gleicher Wahrscheinlichkeit in allen Punkten der Kugelfläche liegen können, so betrachte ich die Gleichungen als für alle Punkte der Kugelfläche  $r = \delta$  gültig.

Für die weitere Behandlung der obigen Gleichungen ist es von Wichtigkeit, zu bemerken, dass  $ix$  als eine sehr kleine Grösse betrachtet werden kann. Dieser Umstand ist auch von Helmholtz<sup>1)</sup> benutzt worden, indem er in seiner Dispersionstheorie die Annahme gemacht hat, dass „die Entfernungen der ponderablen Theile voneinander verschwindend klein gegen die Wellenlängen sind.“ In der That ist man bekanntlich auf sehr verschiedenen Wegen dahin gelangt, sich wenigstens einen Begriff von diesen Entfernungen zu machen. Es mag z. B. für Wasser eine Wellenlänge des sichtbaren Lichtes gegen 10000 mal grösser sein als  $\delta$ , und für die Gase, selbst bei der grössten Verdünnung, bei welcher überhaupt die Dispersion messbar ist, mag die Wellenlänge die Grösse  $\delta$  noch um mehrere hundert mal übersteigen.

1) Helmholtz, Pogg. Ann. 154. p. 584. 1875.

Nun ist aber:

$$N = \frac{lO}{k}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} O, \quad l = \frac{2\pi}{\lambda} N,$$

wenn durch  $N$  der Brechungscoefficient des Körpers, durch  $O$  die Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume und durch  $\lambda$  die ebenfalls auf den leeren Raum bezogene Wellenlänge bezeichnet werden. Aus der letzteren Gleichung ersieht man, dass  $lx$ , welche Grösse in den obigen Formeln  $l\delta$  nicht übersteigen kann, eine kleine Grösse von derselben Ordnung wie  $\delta/\lambda$  sein muss.

Ferner hat man, wenn für  $r = \delta \mu$  durch  $\mu_\delta$  bezeichnet wird:

$$(31) \quad \mu_\delta = \frac{k^2}{O^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}, \quad \text{daher:} \quad N^2 = \frac{l^2}{\mu_\delta}.$$

Wird also  $l\delta$  als eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung betrachtet, so ist  $\mu_\delta \delta^2$  eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung, während  $N^2$  das Verhältniss zweier unendlich kleiner Grössen zweiter Ordnung ist.

Indem also  $lx$  als eine unendlich kleine Grösse betrachtet wird, so ergibt sich aus den Gleichungen (30):

$$lxi \sum \eta_{2n}^m V_{2n}^m + \sum \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m = 0,$$

$$\frac{d}{dr} \sum \eta_{2n}^m V_{2n}^m + lxi \frac{d}{dr} \sum \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m = 0.$$

Mittelst der ersten der Gleichungen ergibt sich hieraus durch Vergleichung der Coefficienten von  $V_{2n}^m$  und  $V_{2n+1}^m$ :

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} & li \left( -\frac{r^2}{4n+1} \eta_{2n}^m - \frac{(2n+2)^2 - m^2}{4n+5} \eta_{2n+2}^m \right. \\ & \quad \left. + \frac{(m+2)(m+1)}{4n+5} \eta_{2n+2}^{m+2} \right) + \eta_{2n+1}^m = 0, \\ & lir \frac{d}{dr} \frac{1}{r^{2n+2}} \left( -\frac{r^2}{4n-1} \eta_{2n-1}^m - \frac{(2n+1)^2 - m^2}{4n+3} \eta_{2n+1}^m \right. \\ & \quad \left. + \frac{(m+2)(m+1)}{4n+3} \eta_{2n+1}^{m+2} \right) + \frac{d}{dr} \frac{1}{r^{2n+1}} \eta_{2n}^m = 0, \end{aligned} \right.$$

in welchen Gleichungen  $r = \delta$  ist.

Wenn  $n = 0$ ,  $m = 0$  gesetzt wird, so bekommt man für  $r = \delta$ :

$$(33) \quad \begin{cases} li(-r^2 \eta_0^0 - \frac{4}{3} \eta_2^0 + \frac{2}{3} \eta_2^2) + \eta_1^0 = 0 \\ -\frac{4}{3} li r \frac{d}{dr} \frac{1}{r^3} \eta_1^0 + \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \eta_0^0 = 0. \end{cases}$$

Da  $r^2 \eta_0^0$  willkürlich als eine endliche Grösse betrachtet werden kann, so werden die in der ersten Gleichung vorkommenden Grössen  $\eta_2^0$  und  $\eta_2^2$  nur insofern Bedeutung haben, als sie endlich sind. Wenn deshalb in der zweiten Gleichung (32)  $n=1$ ,  $m=0$  und  $m=2$  gesetzt wird, so fällt das erste, den Factor  $lr$  enthaltene Glied weg, wonach man für  $r=\delta$ :

$$\frac{d}{dr} \frac{1}{r^3} \eta_2^0 = 0, \quad \frac{d}{dr} \frac{1}{r^3} \eta_2^2 = 0$$

bekommt. Durch Einsetzung der constanten Coëfficienten der Gleichungen (15) ergibt sich hieraus mit Vernachlässigung der unendlich kleinen Grössen, für die der äussersten Schicht bis  $r=\delta$  entsprechenden Constanten:

$$2b_2^0 \delta^5 = 3\beta_2^0, \quad 2b_2^2 \delta^5 = 3\beta_2^2.$$

Für dieselbe Schicht hat man der beiden ersten Gleichungen (29) zufolge:

$$a_2^1 \delta^5 + a_2^1 = 0, \quad c_2^1 \delta^5 + \gamma_2^1 = 0.$$

Wenn ferner in der zweiten der Gleichungen (22)  $n=3$ ,  $m=1$  und  $m=3$  eingesetzt wird, so bekommt man mit Vernachlässigung des ersten unendlich kleinen Gliedes:

$$\alpha_2^1 + \beta_2^0 - \gamma_2^1 = 0, \quad \beta_2^2 - \gamma_2^1 = 0,$$

während aus den Gleichungen (23) für  $n=1$ ,  $m=1$

$$-3a_2^1 - 4b_2^2 + 2b_2^0 - 3c_2^1 = 0$$

$$-5x_1^1 - 3a_2^1 - 4\beta_2^2 + 2\beta_2^0 - 3\gamma_2^1 = 0,$$

erhalten wird. Diese acht Gleichungen genügen indess nicht, um die acht Constanten durch  $x_1^1$  auszudrücken, indem sich zeigt, dass dieselben eine Identität enthalten. Es geht indessen aus den Gleichungen (26) und (28) für  $n=2$ ,  $m=1$ :

$$s_2^1 = a_2^1 - c_2^1 - 2b_2^0, \quad \sigma_2^1 = a_2^1 - \gamma_2^1 - 2\beta_2^0, \quad \sigma_2^1 = q_2 s_2^1,$$

hervor, woraus sich mittelst der obigen Gleichungen:

$$s_2^1 \delta^5 = -2\beta_2^0, \quad \sigma_2^1 = -3\beta_2^0, \quad \text{also: } 3\beta_2^0 \delta^5 = 2\beta_2^0 q_2$$

ergibt. Da aber  $q_2$  allein von den Werthen abhängt, welche  $\mu$  und die Halbmesser der Grenzflächen innerhalb der äussersten



Schicht annehmen, so muss  $\beta_2^0 = 0$  sein. Wir erhalten demnach aus den obigen Gleichungen:

$$b_2^0 = 0, \quad \beta_2^0 = 0, \quad b_2^3 \delta^3 = \frac{3}{2} \beta_2^3 = -\frac{3}{2} \alpha_1^1.$$

Wenn ferner in den Gleichungen (22)  $n = 1$ ,  $m = 1$  eingesetzt wird, so ergibt sich allgemein:

$$h_1^1 + b_0^0 = 0, \quad \frac{1}{2} \mu \alpha_1^1 + \beta_0^0 = 0.$$

Man hat also für die hier betrachtete äusserste Schicht, in welcher  $\mu$  gleich  $\mu_s$  ist, wenn die kleinen Grössen zweiter Ordnung berücksichtigt werden:

$$\eta_0^0 = -h_1^1 (r - \frac{1}{2} \mu_s r^3) - \frac{1}{2} \mu_s \alpha_1^1.$$

In dieser Weise können die Gleichungen (33) in:

$$\begin{aligned} & li (h_1^1 \delta^3 - \frac{1}{2} \alpha_1^1) + b_1^0 \delta^3 + \beta_1^0 = 0 \\ & - li (b_1^0 \delta^3 - 2\beta_1^0) + \mu_s (h_1^1 \delta^3 + \alpha_1^1) = 0 \end{aligned}$$

umgestaltet werden. Es ergibt sich hieraus:

$$\frac{l^2}{\mu_s} = N^2 = \frac{k_1^1 \delta^3 + \alpha_1^1}{k_1^1 \delta^3 - \frac{1}{2} \alpha_1^1} \cdot \frac{b_1^0 \delta^3 + \beta_1^0}{b_1^0 \delta^3 - 2\beta_1^0}.$$

Nun ist der Gleichung (25) zufolge:

$$\alpha_1^1 = p_1 h_1^1.$$

Ferner ist nach (29) für  $r = \delta$ ,  $\xi_1^1 = 0$ , also mit Weglassung der unendlich kleinen Grössen:

$$\alpha_1^1 \delta^3 + \alpha_1^1 = 0.$$

Wenn dann in die zweite Gleichung (22)  $n = 2$ ,  $m = 1$  eingesetzt wird, so bekommt man mit Weglassung des ersten unendlich kleinen Gliedes zweiter Ordnung für die äusserste Schicht:

$$\alpha_1^1 + \beta_1^0 = 0,$$

während aus den Gleichungen (26) und (28) für  $n = 1$ ,  $m = 1$ :

$$\alpha_1^1 - b_1^0 = s_1^1, \quad \alpha_1^1 - \beta_1^0 = \sigma_1^1, \quad \sigma_1^1 = q_1 s_1^1,$$

hervorgeht. Es folgt hieraus:

$$\frac{\beta_1^0}{b_1^0} = \frac{q_1 \delta^3}{q_1 + 2\delta^3}.$$

Der Brechungscoefficient  $N$  wird also durch die einfache Gleichung:

$$(34) \quad N^2 = \frac{\delta^3 + p_1}{\delta^3 - \frac{1}{2} p_1} \cdot \frac{\delta^3 + q_1}{\delta^3 - \frac{1}{2} q_1}$$

bestimmt, wo  $p_1$  und  $q_1$  zwei von  $\delta$  unabhängige Functionen sind.

Wir haben in der innerhalb  $r = \delta$  liegenden äusseren Schicht  $\mu r^2$  als eine unendlich kleine Grösse betrachtet, in

anderen Schichten aber muss diese Grösse einen endlichen Werth annehmen, wenn überhaupt eine Brechung im Körper stattfinden soll. Nehmen wir an, dass  $\mu r^2$  innerhalb der Grenzfläche  $r = \varepsilon$  endlich werde, dann ergibt sich aus der zweiten Gleichung (24):

$$\text{für } r = \varepsilon, \quad 0 = k'_n q'_n + \kappa'_n \psi'_n,$$

während der Gleichung (25) zufolge  $k'_n = p'_n k'^m_n$ , wo  $p'_n$  von  $\varepsilon$  unabhängig ist. Man wird also  $k'^m_n = 0$  und  $\kappa'_n = 0$  haben, dass heisst, die Schwingungen sind innerhalb der Grenzfläche  $r = \varepsilon$  senkrecht zum Radius. Es leuchtet dies auch unmittelbar ein, indem unsere Voraussetzungen mit der Annahme identisch sind, dass die Geschwindigkeit des Lichtes in der Grenzfläche  $r = \varepsilon$  von einem unendlich grossen in einem endlichen Werth übergeht, wodurch alle einfallende Lichtstrahlen gegen den Mittelpunkt gebrochen und die Schwingungen demnach senkrecht zum Radius werden müssen.

Es ergibt sich alsdann aus der ersten der Gleichungen (24) für  $n = 1$ ,  $m = 1$ :

$$h_1 \cdot 2\varepsilon - \frac{\kappa_1}{\varepsilon} = 0, \quad \text{also:} \quad p_1 = 2\varepsilon^3.$$

Man kann demnach  $p_1$  annäherungsweise als eine mit dem Volumen des in der Nähe der Atome stark geänderten Lichtmittels proportionale, von der Brechung desselben aber unabhängige Grösse ansehen.

Die zweite in die Gleichung (34) eingehende Grösse  $q_1$  ist aus den Gleichungen (27) und (28) zu berechnen.

In welcher Weise  $q_1$  von der Wellenlänge abhängig ist, werde ich zunächst durch ein Beispiel zu beleuchten versuchen. Ich nehme an, dass  $\mu$  ausserhalb der Grenzfläche  $r = \varepsilon$  gleich 0 ist, innerhalb derselben aber überall endlich und constant gleich  $\mu'$ . In den Gleichungen (27) ist alsdann  $\sigma'_n = 0$ , und mit Weglassung des oberen Index  $m$  bekommt man, wenn  $n = 1$  gesetzt wird:

$$\begin{aligned} s_1 \varepsilon^3 + \sigma_1 &= s'_1 (\varepsilon^3 - \frac{1}{10} \mu' \varepsilon^5 + \dots), \\ 3s_1 \varepsilon^3 &= s'_1 (3\varepsilon^3 - \frac{1}{2} \mu' \varepsilon^4 + \dots). \end{aligned}$$

Es ergibt sich hieraus:

$$\frac{q_1}{s_1} = q_1 = \frac{1}{15} \mu \cdot \varepsilon^5 + \dots = \frac{a}{\lambda^3} + \dots$$

Vorausgesetzt, dass die Reihenentwicklung convergent ist, lässt sich also  $q_1$  in einer Reihe nach steigenden Potenzen von  $1/\lambda^3$  entwickeln, und das erste Glied  $a/\lambda^3$  der Reihe ist positiv.

Wenn ganz allgemein  $\mu$  als eine endliche und stetig variable Function betrachtet wird, so muss zu der Differentialgleichung (13) zurückgegangen werden, aus welcher Gleichung die Grenzbedingungen (27) abgeleitet werden können. Nehmen wir wie oben  $r = \varepsilon$  als Grenze an, ausserhalb welcher  $\mu = 0$  gesetzt werden kann, so hat man die Aufgabe, die Differentialgleichung unter den Bedingungen zu integrieren, dass für  $r = 0$   $f_n = 0$  und für  $r = \varepsilon$   $f_n = s_n(r^{2n+1} + q_n)$ ,  $df_n/dr = (2n+1)s_n r^{2n}$  werden. Nach Elimination der beiden arbiträren Constanten erhält man aus diesen drei Gleichungen eine Endgleichung zur Bestimmung von  $q_n$ . Wenn nun vorausgesetzt wird, dass  $f_n$  sich überall in einer convergenten Reihe nach Potenzen des in  $\mu$  eingehenden Factors  $1/\lambda^3$  entwickeln lässt, so kann man leicht einsehen, dass  $q_n$  sich allgemein in einer Reihe  $a/\lambda^3 + b/\lambda^5 + \dots$  entwickeln lässt.

Wenn also durch  $A$  der einer grossen Wellenlänge oder  $q_1 = 0$  entsprechende Brechungscoefficient bezeichnet wird, so bekommt man mittelst der Gleichung (34):

$$(35) \quad A^2 = \frac{\delta^3 + p_1}{\delta^3 - \frac{1}{2}p_1}, \quad \frac{A^2 - 1}{A^2 + 2} \delta^3 = \frac{1}{2}p_1, \quad \frac{N^2 - A^2}{N^2 + 2A^2} \delta^3 = \frac{1}{2}q_1.$$

Als Resultat dieser Untersuchung ergibt sich, dass die Gesetze der Brechung in einem durchsichtigen, isotropen Körper mit gewöhnlicher Dispersion durch die folgenden Gleichungen ausgedrückt werden können:

$$\frac{A^2 - 1}{A^2 + 2} \cdot \frac{1}{d} = R, \quad \frac{N^2 - A^2}{N^2 + 2A^2} \cdot \frac{1}{d} = D = \frac{a}{\lambda^3} + \frac{b}{\lambda^5} + \dots$$

wo  $N$  der Brechungscoefficient,  $d$  die Dichtigkeit,  $R$  und  $D$  zwei von der Dichtigkeit des Körpers unabhängige Constanten sind. Ferner ist durch  $a$  eine positive Constante und, wie aus den Gleichungen selbst hervorgeht, durch  $A$  der dem  $\lambda = \infty$  entsprechende Brechungscoefficient bezeichnet.

Die erstere Gleichung habe ich schon vor 14 Jahren<sup>1)</sup> in ganz anderer Weise theoretisch abgeleitet, und es hat sich bekanntlich später die Richtigkeit dieses Gesetz vielfach bestätigt. Aus meinen eigenen Versuchen über die Brechung einiger Flüssigkeiten und deren Dämpfe habe ich die folgenden, der Natriumlinie entsprechenden „Dispersionsconstanten“  $D$  berechnet, wobei  $A$  mittelst der einfachen Formel  $N^2 = A^2 + b/\lambda^2$  bestimmt ist:

	Flüssigkeit bei 10°	Dampf bei 100°
Alkohol . . . . .	0,00585	0,00644
Aethyläther . . . . .	636	623
Chloroform . . . . .	413	409
Aethyljodid . . . . .	551	579
Schwefelkohlenstoff . . . . .	1615	1732
Essigäther . . . . .	586	550

Die Uebereinstimmung der beiden Werthe von  $D$  kann als eine sehr befriedigende betrachtet werden.

Wenn die Reihenentwickelungen (14) der Functionen  $q_1$  und  $\psi_1$  nicht brauchbar sind, so können diese Functionen, wenn zur Abkürzung  $\mu = \alpha^2$  gesetzt wird, durch:

$$q_1 = 3 \frac{\sin \alpha r - \alpha r \cos \alpha r}{\alpha^3}, \quad \psi_1 = \cos \alpha r + \alpha r \sin \alpha r,$$

ausgedrückt werden. Es sei z. B.  $\mu = 0$  ausserhalb der Grenzfläche  $r = \varepsilon$  und  $\mu = \alpha^2$  überall innerhalb dieser Grenzfläche, dann hat man:

$$s_1 \varepsilon^3 + \sigma_1 = s_1' 3 \frac{\sin \alpha \varepsilon - \alpha \varepsilon \cos \alpha \varepsilon}{\alpha^3},$$

$$3 s_1 \varepsilon^2 = s_1' \frac{3 \varepsilon}{\alpha} \sin \alpha \varepsilon,$$

$$\text{woraus:} \quad \frac{\sigma_1}{s_1} = q_1 = -\varepsilon^3 - \frac{3 \varepsilon^2}{\alpha} \operatorname{ctg} \alpha \varepsilon + \frac{3 \varepsilon}{\alpha^2}$$

gefunden wird. Wenn also die Wellenlänge  $\lambda$  und somit auch  $\alpha$  alle Werthe durchläuft, so kann  $q_1$  jeden beliebigen reellen Werth zwischen  $-\infty$  und  $+\infty$  annehmen. Der

1) L. Lorenz, Vidensk. Selsk. Skrifter. 5. Reihe. 8. p. 205. Kopenhagen 1869. Wied. Ann. 11. p. 70. 1880.

zweiten Gleichung (35) zufolge wird also auch bei gewissen Werthen von  $\lambda$   $N^2$  negativ und somit  $N$  imaginär, was in dieser Rechnung mit einer Absorption gleichbedeutend ist.

Wenn angenommen wird, dass innerhalb der Grenzfläche  $r = \epsilon \mu$  endlich und die Reihen convergent sind, während erst in einer sehr kleinen Entfernung vom Mittelpunkte die Divergenz eintritt, so wird die Absorption nur bei bestimmten Wellenlängen eintreten, in der Weise, dass wir ein gewöhnliches, mit Absorptionslinien begleitetes Dispersionspectrum bekommen.

Während also diese Theorie den Fall einer Absorption nicht ausschliesst, so kann auf der anderen Seite eine unvollkommene Absorption, in welcher  $N$  die complexe Form  $a + bi$  annimmt, nicht aus unseren Voraussetzungen abgeleitet werden. Wenn deshalb auch die Gesetze der anomalen Dispersion theoretisch abgeleitet werden sollen, so muss zunächst die Berechnung auf ein den zusammengesetzten Körpern und Mischungen entsprechendes System von Atomen ausgedehnt werden. Alsdann wird es sich erst zeigen, ob man genöthigt sein wird, die Grundlage selbst der Theorie dahin abzuändern, dass  $\mu$  als eine complexe Variable aufgefasst wird, was dem Falle entspricht, dass noch eine erste Derivirte der Componenten nach  $t$  zu den Gliedern der ursprünglichen Differentialgleichungen der Lichtbewegungen hinzugefügt wird. Es würden alsdann die Gleichungen die nämliche Form annehmen, wie ich es schon in meinem Aufsatze über die Identität der Schwingungen des Lichtes mit den electricischen Strömen<sup>1)</sup> angegeben habe. Ueberhaupt ist, wenn die Möglichkeit einer Berechnung der Lichtbewegungen im Inneren der Körper gegeben ist, für die ferneren Untersuchungen ein weites Feld offen.

1) L. Lorenz, Pogg. Ann. 131. p. 243. 1867.

II. Ueber die elliptische Polarisation bei der Reflexion an durchsichtigen Körpern;  
von A. C. van Ryn van Alkemade.

Einleitung.

Die bekannten Formeln Fresnel's für die Intensitätsänderungen des parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichtes bei der Reflexion an der Oberfläche durchsichtiger Körper:

$$a_p = -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}, \quad a_s = -\frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)},$$

sind in mannichfacher Weise von der Erfahrung bestätigt worden. Jedoch widersprechen einige Folgerungen aus denselben späteren Versuchen.

Infolge dessen hat Cauchy, namentlich mit Rücksicht auf die Versuche Jamin's, für das Amplitudenverhältniss  $a_s/a_p$  und den Phasenunterschied  $d$  folgende Ausdrücke aufgestellt:

$$\left(\frac{a_s}{a_p}\right)^2 = \frac{\cos^2(i+r) + \varepsilon^2 \sin^2 i \sin^2(i+r)}{\cos^2(i-r) + \varepsilon^2 \sin^2 i \sin^2(i-r)},$$

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{d}{\lambda} = \frac{\varepsilon \sin i [\operatorname{tg}(i+r) - \operatorname{tg}(i-r)]}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 i \operatorname{tg}(i+r) \operatorname{tg}(i-r)},$$

welche die Beobachtungen in befriedigender Weise darstellen. Eine einfache Ableitung dieser Formeln ist von Eisenlohr gegeben worden<sup>1)</sup>, er hat darin gezeigt, dass je nach der Fortpflanzungsart, welche man für die Longitudinalschwingungen annimmt, statt  $\varepsilon \sin i$  in den Formeln Cauchy's, entweder eine Constante oder eine Grösse von der Form:

$$\frac{2u \sin i}{i \sqrt{\sin^2 i + \ell^2}}$$

gesetzt werden muss. Die drei Formeln, welche man so erhält, können fast alle gleich gut mit den Beobachtungen in Uebereinstimmung gebracht werden; in allen bleibt aber die Bedeutung der Constanten unbestimmt. Da sich nun in der letzten Zeit mehr und mehr die electromagnetische

1) Eisenlohr, Pogg. Ann. 104. p. 337. 1858.

Theorie des Lichtes als richtig erweist, habe ich derartige Formeln auch aus dieser Theorie abgeleitet. Die darin vorkommenden Constanten haben eine ganz bestimmte physikalische Bedeutung.

Ausser den Longitudinalschwingungen übt ohne Zweifel noch ein zweiter Umstand auf die Reflexion Einfluss aus, nämlich ein allmählicher Uebergang zwischen den beiden Medien, an deren Grenze das Licht reflectirt wird, während die gewöhnliche Theorie eine scharfe Trennung zwischen ihnen annimmt. Dieser Einfluss ist schon von L. Lorenz<sup>1)</sup> behandelt worden, er hat aber keine bestimmten Formeln für Phasenunterschied und Amplitudenverhältniss abgeleitet. Ich habe es versucht, auch in dieser Hinsicht die Theorie zu vervollständigen, und im Anschluss zu dem schon genannten Einfluss der Longitudinalschwingungen dabei die electromagnetische Theorie zu Grunde gelegt. In meiner Dissertation<sup>2)</sup> habe ich aber gezeigt, dass man unabhängig von jeder Theorie des Lichtes zu ganz denselben Formeln gelangen kann. Dieselben gestatten, mittelst der Beobachtungen Jamin's eine Bestimmung der Dicke der Grenzschicht, in welcher der allmähliche Uebergang stattfindet, Der Werth derselben ist von derselben Grössenordnung wie der Radius der Wirkungssphäre, was als eine Stütze für die Theorie zu betrachten ist, weil die beiden Grössen in engem Zusammenhange stehen.

§ 1. Die Bewegungsgleichungen der Electricität für einen vollkommenen Isolator sind von Helmholtz in folgender Form aufgestellt:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{z}{\varepsilon} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\eta}{\varepsilon} \right) = A (1 + 4\pi \vartheta) \frac{\partial L}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\xi}{\varepsilon} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\zeta}{\varepsilon} \right) = A (1 + 4\pi \vartheta) \frac{\partial M}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\eta}{\varepsilon} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\xi}{\varepsilon} \right) = A (1 + 4\pi \vartheta) \frac{\partial N}{\partial t}, \end{cases}$$

1) L. Lorenz, Pogg. Ann. 111. p. 315. 1860.

2) A. C. van Ryn van Alkemade, Over de elliptische polarisatie bij de tergaatsing van het licht door doorschijnende middenstoffen. 's Gravenhage 1882.



$$(1) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\xi}{\epsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\eta}{\epsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\zeta}{\epsilon} \right) &= -A\varphi + A^2 k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} &= A \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - 4\pi \frac{\partial \xi}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} &= A \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} - 4\pi \frac{\partial \eta}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} &= A \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} - 4\pi \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Zu diesen Gleichungen gehören noch folgende Bedingungen-  
gleichungen, welche an der Grenze zweier Isolatoren erfüllt  
sein müssen:

$$(2) \left\{ \begin{aligned} \frac{\xi_1}{\epsilon_1} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_1 &= \frac{\xi_2}{\epsilon_2} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_2, & I_1 + \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)_1 &= I_2 + \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)_2, \\ \frac{\eta_1}{\epsilon_1} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_1 &= \frac{\eta_2}{\epsilon_2} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_2, & M_1 + \left( \frac{\partial \chi}{\partial y} \right)_1 &= M_2 + \left( \frac{\partial \chi}{\partial y} \right)_2, \\ \frac{\zeta_1}{\epsilon_1} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_1 &= \frac{\zeta_2}{\epsilon_2} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_2, & N_1 + \left( \frac{\partial \chi}{\partial z} \right)_1 &= N_2 + \left( \frac{\partial \chi}{\partial z} \right)_2. \end{aligned} \right.$$

Hierin bedeuten  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  die Componenten der dielectric-  
schen Polarisation;  $L$ ,  $M$ ,  $N$  diejenigen der magnetisirenden  
Kraft,  $\varphi$  die electriche,  $\chi$  die magnetische Potentialfunction,  
 $\epsilon$  die Constante der dielectricischen,  $\vartheta$  die der magnetischen  
Polarisation, während  $k$  die unbekannte Constante ist, welche  
in der Helmholtz'schen Formel für die Induction zweier  
Stromelemente auftritt. Diesen Gleichungen entspricht eine  
Fortpflanzung electriccher Schwingungen in ebenen Wellen,  
deren Fortpflanzungsgeschwindigkeiten  $v$  der transversalen  
und  $V$  der longitudinalen Schwingungen sind:

$$v = \frac{1}{A \sqrt{4\pi\epsilon(1+4\pi\vartheta)}}, \quad V = \frac{1}{A} \sqrt{\frac{1+4\pi\epsilon}{4\pi\epsilon k}}.$$

Denken wir uns nun zwei homogene Medien, getrennt  
durch eine Ebene, welche wir zur  $yz$ -Ebene wählen. Die  
positive  $x$ -Axe sei nach der Seite des zweiten Mediums ge-  
richtet. Dann können die Grenzbedingungen (2) mit Hülfe  
bekannter Eigenschaften aus der Theorie der Electricität in  
folgende Form gebracht werden:

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1+4\pi\epsilon_1}{\epsilon_1} \xi_1 = \frac{1+4\pi\epsilon_2}{\epsilon_2} \xi_2, \quad \frac{\eta_1}{\epsilon_1} = \frac{\eta_2}{\epsilon_2}, \quad \frac{\zeta_1}{\epsilon_1} = \frac{\zeta_2}{\epsilon_2}, \\ (1+4\pi\vartheta_1) L_1 = (1+4\pi\vartheta_2) L_2, \quad M_1 = M_2, \quad N_1 = N_2. \end{array} \right.$$

Dazu kommt noch die Stetigkeit von  $\varphi$  und  $\chi$ .

Im Nachstehenden werden wir, um die Sache etwas einfacher darzustellen, von den magnetischen Eigenschaften der Medien absehen, also  $\vartheta = 0$  setzen, was um so mehr erlaubt ist, weil man wirklich gefunden hat, dass das Verhältniss  $(1+4\pi\vartheta_1)/(1+4\pi\vartheta_2)$  wenig von der Einheit abweicht.

Wählen wir noch die Einfallsebene zur  $xz$ -Ebene, so kann ein Bündel homogenen polarisirten Lichtes, welches unter einen Winkel  $\alpha_1$  einfällt, und dessen Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene stehen, mittelst folgender Ausdrücke dargestellt werden:

$$\xi = 0, \quad \eta = \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x \cos \alpha_1 + z \sin \alpha_1}{v_1} + p \right), \quad \zeta = 0, \\ L = 4\pi A v_1 \sin \alpha_1 \eta, \quad M = 0, \quad N = -4\pi A v_1 \cos \alpha_1 \eta, \quad \varphi = 0.$$

Dass diese Ausdrücke den Bewegungsgleichungen entsprechen, sieht man leicht, wenn man sie auf den betrachteten Fall anwendet und ausserdem  $\epsilon$  als constant annimmt, weil die beiden Medien homogen sind. Im Folgenden wird es aber bequemer sein, eine complexe Form anzuwenden, deren reeller Theil die ebengenannte Lösung ist. Dann wird das einfallende Licht bestimmt durch folgende Ausdrücke:

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} [\eta_1] = e^{-i\psi_1} \\ [L_1] = 4\pi A v_1 \sin \alpha_1 e^{-i\psi_1} \\ [N_1] = -4\pi A v_1 \cos \alpha_1 e^{-i\psi_1} \end{array} \right\} \psi_1 = \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x \cos \alpha_1 + z \sin \alpha_1}{v_1} + p \right).$$

Solange  $\psi_1$  reell bleibt, ist es gleichgültig, ob man  $e^{+i\psi_1}$  oder  $e^{-i\psi_1}$  statt  $\cos \psi_1$  setzt; werden aber, wie es später vorkommen wird,  $\cos \alpha_1$  oder  $\sin \alpha_1$  imaginär, so muss das Vorzeichen von  $\psi_1$  so gewählt werden, dass der reelle Exponentialfactor, der dann in  $e^{\pm i\psi_1}$  auftritt, in der Fortpflanzungsrichtung immer kleiner wird.

Gleichfalls haben wir für das zurückgeworfene Licht:

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} [\eta_1] = a_1 e^{-i\psi_1'} \\ [L_1] = 4\pi A v_1 a_1 \sin \alpha_1' e^{-i\psi_1'} \\ [N_1] = 4\pi A v_1 a_1 \cos \alpha_1' e^{-i\psi_1'} \end{array} \right\} \psi_1' = \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{x \cos \alpha_1' - z \sin \alpha_1'}{v_1} + p \right),$$

für das gebrochene:

$$(7) \left\{ \begin{aligned} [\eta_2] &= a_2 e^{-i\psi_2} \\ [L_2] &= 4\pi A v_2 a_2 \sin \alpha_2 e^{-i\psi_2} \\ [N_2] &= -4\pi A v_2 a_2 \cos \alpha_2 e^{-i\psi_2} \end{aligned} \right\} \psi_2 = \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x \cos \alpha_2 + z \sin \alpha_2}{v_2} + p \right).$$

Die Grösse  $p$ , welche die Phase bestimmt, ist für die drei Lichtbündel gleichgesetzt, weil eine Phasenänderung sich von selbst aus den Formeln, die wir für  $a_1$  und  $a_2$  finden werden, ergeben wird. Die gewöhnlichen Gesetze der Reflexion und Brechung geben hier folgende Relationen:

$$\sin \alpha_1 = \sin \alpha_1', \quad \frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2};$$

daraus ergibt sich, dass für  $x = 0$  der Werth von  $\psi$  für die drei Lichtbündel derselbe wird. Weiter ist überall:

$$\xi = \zeta = M = \eta = 0,$$

und damit haben wir allen Grenzbedingungen Genüge geleistet ausser denen, die sich auf  $\eta$ ,  $L$  und  $N$  beziehen. Die Stetigkeit von  $\eta/\epsilon$  gibt nun für  $x = 0$ :

$$(8) \quad \frac{1}{\epsilon_1} e^{-i\psi_1} + \frac{a_1}{\epsilon_1} e^{-i\psi_1'} = \frac{a_2}{\epsilon_2} e^{-i\psi_2}, \quad \text{also:} \quad \frac{1 + a_1}{\epsilon_1} = \frac{a_2}{\epsilon_2}.$$

Die von  $L$  ergibt:

$$v_1 \sin \alpha_1 e^{-i\psi_1} + a_1 v_1 \sin \alpha_1 e^{-i\psi_1'} = a_2 v_2 \sin \alpha_2 e^{-i\psi_2},$$

oder:

$$(9) \quad (1 + a_1) v_1 \sin \alpha_1 = a_2 v_2 \sin \alpha_2$$

und endlich die von  $N$ :

$$(10) \quad (1 - a_1) v_1 \cos \alpha_1 = a_2 v_2 \cos \alpha_2.$$

Leicht überzeugt man sich, dass (8) und (9) dasselbe ausdrücken; es folgt nämlich aus (3) dass:

$$\frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1},$$

und aus dem Brechungsgesetze, dass:

$$\frac{v_1 \sin \alpha_1}{v_2 \sin \alpha_2} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \quad \text{ist.}$$

Aus (9) und (10) kann, nach Elimination von  $a_2$ ,  $a_1$  bestimmt werden; man findet dafür:

$$(11) \quad a_1 = - \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Betrachten wir die Zurückwerfung polarisirten Lichtes, dessen Schwingungen parallel zur Einfallsebene vor sich gehen. Das einfallende Licht ist bestimmt durch die Formeln:

$$(12) \left\{ \begin{aligned} [\xi_1] &= -\sin \alpha_1 e^{-i\psi_1} \\ [\zeta_1] &= \cos \alpha_1 e^{-i\psi_1} \\ [M_1] &= 4\pi A v_1 e^{-i\psi_1} \end{aligned} \right\} \psi_1 = \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x \cos \alpha_1 + z \sin \alpha_1}{v_1} + p \right),$$

welche den Bewegungsgleichungen Genüge leisten. Das zurückgeworfene Licht kann folgenderweise dargestellt werden:

$$(13) \left\{ \begin{aligned} [\xi_1'] &= -a_1 \sin \alpha_1' e^{-i\psi_1'} \\ [\zeta_1'] &= -a_1 \cos \alpha_1' e^{-i\psi_1'} \\ [M_1'] &= 4\pi A v_1 a_1 e^{-i\psi_1'} \end{aligned} \right\} \psi_1' = \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{x \cos \alpha_1' - z \sin \alpha_1'}{v_1} + p \right).$$

Ausserdem können nun aber auch Longitudinalschwingungen auftreten, deren Componenten sind:

$$\left\{ \begin{aligned} [\xi_1''] &= -b_1 \cos \beta_1 e^{-i\psi_1''} \\ [\zeta_1''] &= b_1 \sin \beta_1 e^{-i\psi_1''} \end{aligned} \right\} \psi_1'' = \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{x \cos \beta_1 - z \sin \beta_1}{V_1} + p \right).$$

Es tritt hier keine magnetisirende Kraft auf, wohl aber hat die Potentialfunction einen veränderlichen Werth, der mit Hülfe der Bewegungsgleichungen gefunden werden kann, nämlich:

$$[\varphi_1''] = -2iT V_1 b_1 e^{-i\psi_1''}.$$

Für die Winkel  $\alpha_1'$  und  $\beta_1$  sind die spitzen genommen.

Im gebrochenen Licht sind ebenso die Transversal- und die Longitudinalschwingungen zu unterscheiden. Für die ersteren findet man:

$$(14) \left\{ \begin{aligned} [\xi_2] &= -a_2 \sin \alpha_2 e^{-i\psi_2} \\ [\zeta_2] &= a_2 \cos \alpha_2 e^{-i\psi_2} \\ [M_2] &= 4\pi A v_2 a_2 e^{-i\psi_2} \end{aligned} \right\} \psi_2 = \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x \cos \alpha_2 + z \sin \alpha_2}{v_2} + p \right),$$

für die letzteren:

$$\left\{ \begin{aligned} [\xi_2'] &= b_2 \cos \beta_2 e^{-i\psi_2'} \\ [\zeta_2'] &= b_2 \sin \beta_2 e^{-i\psi_2'} \\ [\varphi_2'] &= -2iT V_2 b_2 e^{-i\psi_2'} \\ [M_2'] &= 0 \end{aligned} \right\} \psi_2' = \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x \cos \beta_2 + z \sin \beta_2}{V_2} + p \right).$$

Die Gesetze der Reflexion und Brechung geben hier:

$$\sin \alpha_1 = \sin \alpha_1', \quad \frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \beta_1}{V_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2} = \frac{\sin \beta_2}{V_2},$$

daher wird der Werth von  $\psi$  für alle betrachteten Lichtbündel an der Grenzebene derselbe.

Zunächst folgt nun aus der Stetigkeit der Potentialfunction:

$$(15) \quad b_1 V_1 = b_2 V_2 \text{ oder: } b_1 \sin \beta_1 = b_2 \sin \beta_2.$$

Zweitens muss der Ausdruck  $((1+4\pi\epsilon)/\epsilon \xi)$  an der Grenzebene stetig bleiben, daraus folgt:

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{1+4\pi\epsilon_1}{\epsilon_1} [-(1+a_1) \sin \alpha_1 - b_1 \cos \beta_1] \\ = \frac{1+4\pi\epsilon_2}{\epsilon_2} [-a_2 \sin \alpha_2 + b_2 \cos \beta_2]. \end{cases}$$

Drittens gibt dieselbe Bedingung für  $\zeta/\epsilon$ :

$$(17) \quad \frac{1}{\epsilon_1} [(1-a_1) \cos \alpha_1 + b_1 \sin \beta_1] = \frac{1}{\epsilon_2} [a_2 \cos \alpha_2 + b_2 \sin \beta_2].$$

Endlich folgt aus der Stetigkeit von  $M$ :

$$(18) \quad (1+a_1) v_1 = a_2 v_2 \text{ oder: } (1+a_1) \sin \alpha_1 = a_2 \sin \alpha_2.$$

Man kann nun mittelst (15) und (18)  $a_2$  und  $b_2$  aus (16) und (17) eliminieren, dann gibt (16):

$$\left(\frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2}\right) (1+a_1) \sin \alpha_1 = -b_1 \sin \beta_1 \left[ \frac{1+4\pi\epsilon_1}{\epsilon_1} \operatorname{ctg} \beta_1 + \frac{1+4\pi\epsilon_2}{\epsilon_2} \operatorname{ctg} \beta_2 \right].$$

Ebenso geht (17) über in:

$$\frac{1-a_1}{\epsilon_1} \cos \alpha_1 - \frac{1+a_1 \cos \alpha_2}{\epsilon_2 \sin \alpha_2} \sin \alpha_1 = b_1 \sin \beta_1 \left( \frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right).$$

Die Elimination von  $b_1$  aus den beiden letzteren Gleichungen gibt:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right)^2 (1+a_1) \sin \alpha_1 \\ &= \left[ \frac{1+4\pi\epsilon_1}{\epsilon_1} \operatorname{ctg} \beta_1 + \frac{1+4\pi\epsilon_2}{\epsilon_2} \operatorname{ctg} \beta_2 \right] \left( \frac{1-a_1 \cos \alpha_1}{\epsilon_1} - \frac{1+a_1 \cos \alpha_2}{\epsilon_2 \sin \alpha_2} \sin \alpha_1 \right), \end{aligned}$$

woraus  $a_1$  entwickelt werden kann. Man findet so für diese Grösse:

$$(19) \quad a_1 = \frac{1-q \operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)}{1+q \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad \text{wo:}$$

$$q = \frac{\frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2}}{\frac{1+4\pi\epsilon_1}{\epsilon_1} \operatorname{ctg} \beta_1 + \frac{1+4\pi\epsilon_2}{\epsilon_2} \operatorname{ctg} \beta_2}$$

gesetzt ist. Der Werth von  $\beta_1$  und  $\beta_2$  und damit auch derjenige von  $q$  hängen wesentlich ab von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalschwingungen, also von der unbekannten Constante  $k$ .

Unabhängig aber von dem Werthe dieser Constante kann man ein Resultat erhalten, wenn man die Hypothese einführt, dass  $\varepsilon$  im allgemeinen sehr gross ist. Dass dies wirklich erlaubt ist, wird in der electromagnetischen Theorie des Lichtes dargethan. Man kann dann  $1/\varepsilon$  gegen die Einheit vernachlässigen; dadurch werden die Gleichungen sehr vereinfacht, und es zeigt sich, dass  $b_1$  und  $b_2$  von derselben Grössenordnung wie  $1/\varepsilon_1$  und  $1/\varepsilon_2$  werden, sodass bei erster Annäherung die Longitudinalschwingungen ausser acht gelassen werden dürfen. In dieser Weise erhält man für  $a_1$  den Fresnel'schen Werth:

$$a_1 = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Will man diese Vereinfachung nicht durchführen und somit den Einfluss der Longitudinalschwingungen in die Berechnung aufnehmen, so muss man erst ermitteln, welche Form die Ausdrücke für diese Schwingungsart erhalten. Wir haben für die Longitudinalschwingungen im reflectirten Licht gesetzt  $b_1 e^{-i\psi_1}$ , wo:

$$\psi_1'' = \frac{2\pi}{T} \left( t + \frac{x \cos \beta_1 - z \sin \beta_1}{V_1} + p \right) \text{ ist.}$$

Diesen Werth kann man wegen  $\sin \beta_1 / V_1 = \sin \alpha_1 / v_1$  auch so schreiben:

$$b_1 e^{-i \frac{2\pi \cos \beta_1}{T V_1} z} \left[ \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - z \frac{\sin \alpha_1}{v_1} + p \right) - i \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - z \frac{\sin \alpha_1}{v_1} + p \right) \right].$$

Der Factor mit  $\cos \beta_1 / V_1$  ist hier im Exponenten gelassen, weil er eventuell imaginär werden kann; dann wird aber der Exponent von  $e$  reell, was darauf hindeutet, dass die Amplitude der Longitudinalschwingungen mit zunehmender Entfernung von der Grenzebene abnimmt. Wirklich haben wir von vornherein einigen Grund, dies anzunehmen, da man nie etwas von den Longitudinalschwingungen bemerkt hat. Für  $\cos \beta_1 / V_1$  finden wir:

$$\begin{aligned}\frac{\cos \beta_1}{V_1} &= \frac{1}{V_1} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha_1}{v_1^2} V_1^2} = \sqrt{\frac{1}{V_1^2} - \frac{\sin^2 \alpha_1}{v_1^2}} \\ &= \frac{\sin \alpha_1}{v_1} \sqrt{\frac{k}{(1 + 4\pi \varepsilon_1) \sin^2 \alpha_1} - 1}.\end{aligned}$$

Alles hängt nun ab von der Constante  $k$ ; ist diese negativ oder Null, so wird  $\cos \beta_1 / V_1$  sicher imaginär, ist aber  $k$  positiv, so muss:

$$\frac{k}{(1 + 4\pi \varepsilon_1) \sin^2 \alpha_1} < 1$$

sein, damit  $\cos \beta_1 / V_1$  imaginär wird. Letzteres kommt darauf hinaus, dass man  $k$  als sehr klein in Vergleich mit  $\varepsilon$  annimmt. Wenn aber  $\sin \alpha_1 = 0$  oder sehr klein wird, so wird das Vorhergehende zweifelhaft; dieser Fall muss daher später noch näher erörtert werden. Kehren wir zurück zu der Formel für  $\alpha_1$  aus (19), so haben wir erstens zu untersuchen, welchen Werth die Grösse:

$$q = \frac{\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}}{\frac{1 + 4\pi \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \operatorname{ctg} \beta_1 + \frac{1 + 4\pi \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \operatorname{ctg} \beta_2}$$

erhält. Dieser Ausdruck ist von der Ordnung  $1/\varepsilon$ ; wenn wir nun bei einer zweiten Annäherung die Grössen von der Ordnung  $(1/\varepsilon)^2$  weglassen, so finden wir:

$$q = \frac{n^2 - 1}{8\pi \varepsilon_2 (\operatorname{ctg} \beta_1 + \operatorname{ctg} \beta_2)},$$

und schliesslich:

$$q = \frac{n^2 - 1}{8\pi \varepsilon_2} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{(1 + 4\pi \varepsilon_1) \sin^2 \alpha_1} - 1} + \sqrt{\frac{k}{(1 + 4\pi \varepsilon_2) \sin^2 \alpha_2} - 1}}$$

Nehmen wir zuerst an,  $k$  sei negativ, somit  $k = -k'$ , dann wird:

$$q = -i \frac{n^2 - 1}{8\pi \varepsilon_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k'}{(1 + 4\pi \varepsilon_1) \sin^2 \alpha_1}} + \sqrt{1 + \frac{k'}{(1 + 4\pi \varepsilon_2) \sin^2 \alpha_2}}}.$$

Ist  $k$  positiv, so muss man, wie oben schon dargethan, annehmen:

$$\frac{k}{(1 + 4\pi \varepsilon_1) \sin^2 \alpha_1} < 1 \quad \text{und} \quad \frac{k}{(1 + 4\pi \varepsilon_2) \sin^2 \alpha_2} < 1;$$

dann wird aber:



$$q = -i \frac{n^2 - 1}{8\pi\epsilon_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k}{(1+4\pi\epsilon_1)\sin^2\alpha_1}} + \sqrt{1 - \frac{k}{(1+4\pi\epsilon_2)\sin^2\alpha_2}}}.$$

Ist endlich  $k = 0$ , so wird:

$$q = -i \frac{n^2 - 1}{8\pi\epsilon_2}.$$

Jedenfalls können wir also setzen  $q = -ip$ , wo  $p$  in den drei betrachteten Fällen eine verschiedene Bedeutung hat, aber immer positiv ist, solange  $n > 1$  ist.

Schliesslich haben wir nun für  $a_1$ :

$$a_1 = \frac{1 + ip \operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)}{1 - ip \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

und, wenn man zur Vereinfachung setzt:

$$p \operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) = \operatorname{tg} l, \quad p \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \operatorname{tg} m,$$

$$a_1 = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) \cos m}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) \cos l} e^{i(l+m)}.$$

Der Ausdruck für die Schwingungen parallel zur Einfallsebene im reflectirten Licht wird nun:

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) \cos m}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) \cos l} e^{-i(\psi_1' - l - m)}.$$

Der reelle Theil dieses Ausdruckes wird, wenn wir die Amplitude  $a$ , nennen:

$$a_1 \cos(\psi_1' - l - m).$$

Daraus ergibt sich, dass die Schwingungen parallel zur Einfallsebene eine Phasenverzögerung  $l + m$  erlitten haben, während die Intensität bestimmt ist durch:

$$a_1^2 = \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha_1 - \alpha_2) (1 + p^2 \operatorname{tg}^2(\alpha_1 + \alpha_2))}{\operatorname{tg}^2(\alpha_1 + \alpha_2) (1 + p^2 \operatorname{tg}^2(\alpha_1 - \alpha_2))}.$$

Die Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene erleiden keine Phasenänderung, es stellt somit  $l + m$  zugleich den Phasenunterschied dar. Wenn bei der Reflexion in Luft die Phase der Schwingungen parallel zur Einfallsebene verzögert ist gegen diejenige der senkrechten Schwingungen, nennt Jamin den Phasenunterschied positiv, im umgekehrten Falle negativ. In unserem Falle hängt das Vorzeichen von  $l + m$  allein ab von demjenigen von  $p$ , und weil bei der Reflexion in Luft  $n > 1$ , somit  $p$  positiv ist, wird auch  $l + m$  positiv. Die Phasenänderung der parallelen Schwingungen

ist daher eine Verzögerung, und der Phasenunterschied, welcher von den Longitudinalschwingungen herrührt, immer positiv.

Es erübrigt nun noch den Fall zu untersuchen, dass  $\alpha_1 = 0$  wird. Dann finden wir nach einiger Rechnung für  $\alpha_1$  aus (19):

$$\alpha_1 = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{n-1}{n+1},$$

einen ganz bestimmten reellen Werth, was darauf hindeutet, dass in diesem Falle keine Phasenänderung stattfindet.

§ 2. Die Theorie der Zurückwerfung des Lichtes in ihrer einfachsten Form geht immer von der Voraussetzung aus, dass die beiden Medien, an deren Grenze das Licht reflectirt wird, scharf voneinander getrennt sind, und dass sie bis an die Trennungsfläche als homogen betrachtet werden dürfen. Das ist aber nicht genau, denn die Molecularkräfte, welche die beiden Medien an ihrer Grenzfläche auf einander ausüben, bewirken, dass der Zustand in der unmittelbaren Nähe der Grenzebene ein anderer wird als in grösseren Entfernungen davon. Es sind daher alle physikalischen Eigenschaften der beiden Medien in der Nähe der Grenzebene als Functionen der Entfernung von dieser Ebene aufzufassen, und erst in einer Entfernung, die mit dem Radius der Wirkungssphäre im Zusammenhang steht, können die beiden Medien als homogen betrachtet werden. Daher befindet sich zwischen ihnen eine Uebergangsschicht, zwar von sehr geringer Dicke, welche aber in einer vollständigen Theorie der Reflexion berücksichtigt werden muss.

Eine einfache Berechnung zeigt, dass die Annahme derselben, sei die Dicke noch so gering, wirklich zu der Erklärung der beobachteten elliptischen Polarisation beitragen kann. Denn aus der Interferenz des Lichtes, welches an der Vorderseite, und desjenigen, welches an der Hinterseite der Schicht reflectirt wird, ergibt sich unmittelbar eine Phasenänderung des reflectirten Lichtes, welche im allgemeinen für Schwingungen, senkrecht zur Einfallsebene eine andere ist, als für Schwingungen parallel zur Einfallsebene; daher der Phasenunterschied. Es fragt sich nur, woher es kommt, dass dieser

Phasenunterschied einen beträchtlichen Werth erreichen und namentlich für den Polarisationswinkel ein Viertel Wellenlänge werden kann. Denken wir uns eine einzige sehr dünne Uebergangsschicht, die wir der Einfachheit wegen als homogen betrachten; der Einfallswinkel sei  $\alpha_1$ , der Brechungswinkel in der Schicht  $\alpha_2$ , derjenige im zweiten Medium  $\alpha_3$ . Falls  $\alpha_1$  dem Polarisationswinkel gleich ist, wird  $\alpha_1 + \alpha_3 = 90^\circ$ .

Wir betrachten zuerst die Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene. Der Reflexionscoefficient an der Vorderfläche der Schicht ist:

$$-\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)},$$

derjenige an der Hinterfläche:

$$-\frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)}{\sin(\alpha_2 + \alpha_3)} \quad \text{oder} \quad -\frac{\cos(\alpha_1 + \alpha_2)}{\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Das negative Vorzeichen in beiden Formeln deutet hin auf eine Phasenänderung einer halben Wellenlänge, welche ebensowohl das an der Hinterfläche wie das an der Vorderfläche reflectirte Licht erleidet. Ausserdem ist die Phase der letzteren Lichtart gegen die der ersteren ein wenig verzögert wegen des zweimaligen Durchlaufens der Schicht. Der Coefficient  $-\cos(\alpha_1 + \alpha_2)/\cos(\alpha_1 - \alpha_2)$  ist sehr klein, weil  $\alpha_1 + \alpha_2$  nicht weit von  $90^\circ$  entfernt ist, daher dürfen wir die Lichtbündel, welche zwei und mehr Reflexionen in der Schicht erlitten haben, ausser acht lassen. Im ganzen hat also das reflectirte Licht eine Phasenänderung von einer halben Wellenlänge erlitten und dazu noch eine Phasenänderung, die sich mit Hülfe des Reflexionscoefficienten und der Dicke der Schicht leicht berechnen lässt, die aber jedenfalls nur sehr klein ist. Ein ganz anderes Verhalten zeigen die Schwingungen parallel zur Einfallsebene, und zwar wegen des eigenthümlichen Zeichenwechsels des Reflexionscoefficienten bei dem Polarisationswinkel. Der Reflexionscoefficient an der Vorderfläche der Schicht ist hier:

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)},$$

derjenige an der Hinterfläche:

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_3)}{\operatorname{tg}(\alpha_2 + \alpha_3)} = -\frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Beide Coëfficienten sind also einander gleich, aber von entgegengesetztem Vorzeichen, ausserdem sind sie sehr klein, weil  $\alpha_1 + \alpha_2$  wenig von  $90^\circ$  entfernt ist; daher dürfen wir die höheren Potenzen weglassen und nur die zwei Lichtbündel in Rechnung bringen, welche an der Vorderfläche und an der Hinterfläche reflectirt sind. Zur Berechnung der Phasenänderung, welche aus der Interferenz dieser beiden Bündel entsteht, stellen wir das einfallende Licht durch  $\cos \psi$  vor. Das an der Vorderfläche reflectirte Licht wird:

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} \cos \psi,$$

das an der Hinterfläche reflectirte:

$$- \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} \cos(\psi - \eta),$$

wo  $\eta$  die sehr kleine Phasenverzögerung ist, welche aus dem zweimaligen Durchlaufen der Schicht hervorgeht. Die Summe beider Ausdrücke ist:

$$- 2 \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} \sin \frac{1}{2} \eta \sin(\psi - \frac{1}{2} \eta)$$

$$\text{oder:} \quad - 2 \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} \sin \frac{1}{2} \eta \cos(\psi - \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \eta).$$

Aus dieser Formel geht erstens hervor, dass die Schwingungen parallel zur Einfallsebene ausser dem negativen Vorzeichen noch eine Phasenverzögerung von einem Viertel Wellenlänge, vermehrt um die sehr kleine Grösse  $\frac{1}{2} \eta$ , erhalten. Der Phasenunterschied der beiden Schwingungsarten ist somit nahezu ein Viertel Wellenlänge. Zweitens aber wird die Amplitude wegen des Factors  $\sin \frac{1}{2} \eta$  sehr klein. Beide Schlussfolgerungen stimmen mit den beobachteten Thatsachen überein.

Die vorhergehende ungefähre Rechnung diente nur dazu, um zu zeigen, wie eine Uebergangsschicht von noch so geringer Dicke einen merklichen Phasenunterschied hervorrufen kann. In der Wirklichkeit muss man sich aber eine andere Vorstellung von der Constitution dieser Schicht machen und namentlich darauf acht geben, dass sie nicht

als homogen betrachtet werden darf; die Rechnungen werden dadurch etwas complicirter. Durch die Molecularkräfte, welche das zweite Medium auf das erste ausübt, entsteht an der Grenze des letzteren eine Schicht, deren Dicke dem Radius der Wirkungssphäre gleich ist, und deren Dichte eine andere ist, als in messbarer Entfernung von der Grenzebene. Diese Schicht wirkt auf eine folgende, und so pflanzt sich die Wirkung fort, wird aber gleichzeitig kleiner, sodass in einer gewissen Entfernung von der Grenzebene das erste Medium homogen wird; diese Entfernung ist daher etwas grösser als der Radius der Wirkungssphäre. Dasselbe findet statt an der Grenze des zweiten Mediums; auch hier entsteht somit eine Schicht von veränderlicher Dichte und die zwei Schichten zusammen bilden die ganze Uebergangsschicht, deren Dicke fernerhin  $\delta$  genannt wird. Die Lichtbewegung in dieser Schicht wird bestimmt durch die allgemeinen Differentialgleichungen des vorigen Paragraphen, wo  $\varepsilon$  als eine Function von  $x$  zu betrachten ist. Zur vollständigen Bestimmung des Einflusses der Uebergangsschicht hätten wir nun eigentlich eine Lösung dieser Gleichungen zu suchen, indem dann später die Bedingung, dass die so gefundene Lösung sich an der Vorderfläche der Schicht bei den gewöhnlichen Ausdrücken für die Lichtbewegung im ersten Medium, an der Hinterfläche bei denen des zweiten anschliessen muss, die nöthigen Gleichungen zur Bestimmung der Intensitäten liefern würde.

Wegen der Form der Differentialgleichungen ist aber eine derartige Lösung nicht möglich, wir verfahren daher am einfachsten folgenderweise. Die Ebene, von der an das erste Medium homogen wird, wählen wir zur  $yz$ -Ebene, dann wird die Ebene, wo die Unhomogenität im zweiten Medium aufhört, bestimmt durch  $x = \delta$ . Betrachten wir erstens die Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene, dann wird die Lichtbewegung im ersten und im zweiten Medium vorgestellt durch die Ausdrücke (5), (6), (7) des vorigen Paragraphen. In der Grenzschrift aber, also zwischen  $x = 0$  und  $x = \delta$ , gelten die Differentialgleichungen:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\eta}{\varepsilon} \right) = A \frac{\partial L}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\eta}{\varepsilon} \right) = A \frac{\partial N}{\partial t},$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} = -4\pi A \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0.$$

Die letzte Gleichung kann aus den beiden ersten abgeleitet, eine dieser drei Gleichungen kann daher fortgelassen werden; dazu wählen wir die erste, weil sie keinen Differentialquotient nach  $x$  enthält. Als Unbekannte nehmen wir  $\eta/\varepsilon$ ,  $L$  und  $N$ , dann können die drei Gleichungen in folgender Form geschrieben werden:

$$(20) \quad \frac{\partial \eta'}{\partial x} = A \frac{\partial N}{\partial t}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial z} + 4\pi A \varepsilon \frac{\partial \eta'}{\partial t},$$

wo  $\eta/\varepsilon = \eta'$  gesetzt ist. Die Lösung dieser Gleichungen würde grosse Schwierigkeiten darbieten, weil einer der Coefficienten, nämlich  $4\pi A \varepsilon$  nicht mehr constant, sondern eine Function von  $x$  ist. Wir müssen daher versuchen, auf anderem Wege die Form der Lösung zu finden. Wenn  $\varepsilon$  constant wäre, z. B. gleich  $\varepsilon_1$ , wie im homogenen Theile des ersten Mediums, so hätten die Werthe von  $\eta'$ ,  $L$  und  $N$  den gemeinsamen Factor:

$$e^{-i \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x \cos \alpha_1 + z \sin \alpha_1}{v_1} + p \right)}.$$

Die Uebergangsschicht ist aber nur unhomogen in der Richtung der  $x$ -Axe; die Grössen  $\eta'$ ,  $L$  und  $N$  bleiben daher in derselben Weise von  $z$  und  $t$  abhängig, sodass der oben genannte Factor in der Schicht folgende Form haben wird:

$$f(x) e^{-i \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{z \sin \alpha}{v} + p \right)}.$$

Wir können uns nun die Uebergangsschicht durch Flächen senkrecht zur  $x$ -Axe in unendlich dünne Schichten zerlegt denken, dann findet an jeder Fläche eine Reflexion und eine Brechung statt. Bei jedem dieser Vorgänge bleibt aber  $\sin \alpha/v$  constant, dasselbe gilt somit auch von dem ganzen Factor von  $f(x)$ . Aus dem Vorhergehenden folgt, dass sich die Gleichungen (20) so schreiben lassen:

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{\partial \eta'}{\partial x} = -i \frac{2\pi}{T} A N, & \frac{\partial L}{\partial x} = i \frac{2\pi}{T} \frac{\sin \alpha}{v} N, \\ \frac{\partial N}{\partial x} = i \frac{2\pi}{T} \frac{\sin \alpha}{v} L - i \frac{2\pi}{T} 4\pi A \varepsilon \eta'. \end{cases}$$

Integriren wir diese Gleichungen nach  $x$ , zwischen 0 und  $\delta$ , so wird:

$$\eta_\delta' - \eta_0' = -i \frac{2\pi}{T} A \int_0^\delta N dx, \quad L_\delta - L_0 = i \frac{2\pi \sin \alpha}{T v} \int_0^\delta N dx,$$

$$N_\delta - N_0 = i \frac{2\pi \sin \alpha}{T v} \int_0^\delta L dx - i \frac{2\pi}{T} 4\pi A \int_0^\delta \epsilon \eta' dx.$$

Hieraus geht erstens hervor, dass, wenn man  $\delta = 0$  setzt, die gewöhnlichen Grenzbedingungen, nämlich die Stetigkeit von  $\eta'$ ,  $L$  und  $N$  zurückkehren; zweitens aber, dass durch den Einfluss der Uebergangsschicht die Grenzbedingungen etwas geändert werden, so zwar, dass die Unterschiede der Werthe von  $\eta'$ ,  $L$  und  $N$  an beiden Seiten der Schicht von derselben Grössenordnung wie  $\delta/\lambda$  sind, wo  $\lambda$  die Wellenlänge des Lichtes bedeutet. (Denn die Integrale sind von der Grössenordnung  $\delta$ , und  $A$  ist die umgekehrte Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes.) Diese letzte Bemerkung gibt uns zugleich das Mittel, den Werth der Unterschiede annäherungsweise zu bestimmen. Strenge genommen wird dazu die Bekanntschaft mit den Grössen  $\eta'$ ,  $L$  und  $N$  in der Schicht gefordert; wenn wir uns aber auf Grössen von der Ordnung  $\delta/\lambda$  beschränken, oder wenn wir  $\delta$  als sehr klein in Vergleich mit  $\lambda$  betrachten, dann dürfen wir für  $\eta'$ ,  $L$  und  $N$  unter dem Integralzeichen die Werthe  $\eta_0'$ ,  $L_0$  und  $N_0$  schreiben. So ergibt sich:

$$\eta_\delta' - \eta_0' = -i \frac{2\pi}{T} A N_0 \delta,$$

$$L_\delta - L_0 = i \frac{2\pi \sin \alpha}{T v_1} N_0 \delta,$$

$$N_\delta - N_0 = i \frac{2\pi \sin \alpha}{T v_1} L_0 \delta - i \frac{2\pi}{T} 4\pi A \eta_0' \int_0^\delta \epsilon dx.$$

Die Werthe  $\eta_\delta'$ ,  $\eta_0'$  u. s. w. erhalten wir aus den Gleichungen (5), (6) und (7) des vorigen Paragraphen; wir finden dann schliesslich durch Substitution in den drei letzten Gleichungen:



$$\begin{aligned} \frac{a_2}{\varepsilon_2} e^{i \frac{2\pi \cos \alpha_2}{v_2} \delta} - \frac{1+a_1}{\varepsilon_1} &= i \frac{2\pi}{T} \frac{1-a_1}{\varepsilon_1} \frac{\cos \alpha_1}{v_1} \delta, \\ \frac{1-a_1}{\varepsilon_1} \frac{\cos \alpha_1}{v_1} - \frac{a_2 \cos \alpha_2}{\varepsilon_2 v_2} e^{i \frac{2\pi \cos \alpha_2}{v_2} \delta} &= i \frac{2\pi}{T} \left( \frac{\sin \alpha_1}{v_1} \right)^2 \frac{1+a_1}{\varepsilon_1} \delta - i \frac{2\pi}{T} 4\pi A^2 \frac{1+a_1}{\varepsilon_1} \int_0^\delta \varepsilon dx. \end{aligned}$$

Die Gleichung für  $L_\delta - L_0$  ist nicht benutzt, weil sie dasselbe gibt als diejenige für  $\eta'_\delta - \eta'_0$ .

Durch Elimination von:  $\frac{a_2}{\varepsilon_2} e^{i \frac{2\pi \cos \alpha_2}{v_2} \delta}$  erhalten wir nun:

$$\begin{aligned} \frac{1-a_1}{\varepsilon_1} \frac{\cos \alpha_1}{v_1} \left( 1 - i \frac{2\pi \delta \cos \alpha_2}{T v_2} \right) &= \frac{1+a_1}{\varepsilon_1} \frac{\cos \alpha_2}{v_2} \left( 1 - i \frac{2\pi \delta \cos \alpha_2}{T v_2} \right) + \\ &+ i \frac{1+a_1}{\varepsilon_1} \frac{2\pi}{T v_2^3} \left( \delta - \int_0^\delta \frac{\varepsilon}{\varepsilon_2} dx \right), \text{ oder:} \\ &\left[ (1-a_1) \frac{\cos \alpha_1}{v_1} - (1+a_1) \frac{\cos \alpha_2}{v_2} \right] \\ &= i \frac{2\pi}{T v_2^3} (1+a_1) \left( 1 + i \frac{2\pi \delta \cos \alpha_2}{T v_2} \right) \int_0^\delta \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_2} \right) dx. \end{aligned}$$

Wenn wir auch hier die Grössen von der Ordnung  $(\delta/\lambda)^2$  weglassen, so ergibt sich:

$$(1-a_1) \frac{\cos \alpha_1}{v_1} = (1+a_1) \left[ \frac{\cos \alpha_2}{v_2} + i \frac{2\pi}{T v_2^3} \int_0^\delta \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_2} \right) dx \right].$$

Die Lösung von  $a_1$  gibt:

$$a_1 = - \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2) + ip}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2) + ip}, \quad p = 2\pi \frac{\sin \alpha_1}{\lambda_2} \int_0^\delta \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_2} \right) dx.$$

Die Grösse  $p$  ist von der Ordnung  $\delta/\lambda$ , daher können wir auch schreiben:

$$a_1 = - \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \left[ 1 + ip \frac{2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2) \sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \right], \text{ oder:}$$

$$a_1 = - \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \frac{e^{i\varphi_p}}{\cos \varphi_p}, \text{ wenn:}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_p = p \frac{2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2) \sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \text{ gesetzt wird.}$$

Daraus folgt, dass die Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene durch den Einfluss der Uebergangsschicht eine Phasenverzögerung  $\varphi_p$  erlitten haben, während die Intensität bestimmt ist durch:

$$a_p^2 = \frac{\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_p).$$

Schliesslich kann  $\operatorname{tg} \varphi_p$  noch in folgende Form gebracht werden:

$$\operatorname{tg} \varphi_p = \frac{4\pi n^2 \cos \alpha_1}{n^2 - 1} \frac{1}{\lambda_1} \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{s}{s_2}\right) dx.$$

Es muss nun ganz in derselben Weise der Einfluss der Uebergangsschicht auf die Schwingungen parallel zur Einfallsebene berechnet werden. Vorher aber werden wir die Gleichungen (1) des vorigen Paragraphen so schreiben, dass keine Longitudinalschwingungen auftreten, weil wir diese schon an und für sich betrachtet haben. Wir thun das, indem wir  $1/\varepsilon$  gegen die Einheit vernachlässigen, dadurch dürfen wir zugleich  $\varphi = 0$  setzen. Es bleiben nun, weil  $\eta$ ,  $L$ , und  $N$  in diesem Fall verschwinden, die Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\xi}{\varepsilon} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\zeta}{\varepsilon} \right) = A \frac{\partial M}{\partial t}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = 4\pi A \frac{\partial \xi}{\partial t},$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -4\pi A \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

Die letzte Gleichung ist identisch mit den beiden vorigen, eine dieser Gleichungen kann daher fortgelassen werden; wir wählen dazu die zweite, welche keinen Differentialquotienten nach  $x$  enthält. Als Unbekannte nehmen wir  $\xi$ ,  $\zeta/\varepsilon = \zeta'$  und  $M$ , dann wird:

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \xi}{\partial z} - A \frac{\partial M}{\partial t}, \quad \frac{\partial M}{\partial x} = -4\pi A \varepsilon \frac{\partial \zeta'}{\partial t}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\varepsilon \frac{\partial \zeta'}{\partial z},$$

oder:

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial x} = i \frac{2\pi \sin \alpha_1}{T v_1} \frac{\xi}{\varepsilon} + i \frac{2\pi}{T} A M, \quad \frac{\partial M}{\partial x} = i \frac{2\pi}{T} 4\pi A \varepsilon \zeta',$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -i \frac{2\pi \sin \alpha_1}{T v_1} \varepsilon \zeta'.$$

Durch Integration zwischen 0 und  $\delta$  entsteht:

$$\zeta'_\delta - \zeta'_0 = i \frac{2\pi}{T} \frac{\sin \alpha_1}{v_1} \int_0^\delta \frac{\xi}{\varepsilon} dx + i \frac{2\pi}{T} A \int_0^\delta M dx,$$

$$M_\delta - M_0 = i \frac{2\pi}{T} 4\pi A \int_0^\delta \varepsilon \zeta' dx, \quad \xi_\delta - \xi_0 = -i \frac{2\pi}{T} \frac{\sin \alpha_1}{v_1} \int_0^\delta \varepsilon \zeta' dx.$$

Aus diesen Gleichungen ersehen wir, dass die Unterschiede der Werthe von  $\zeta'$ ,  $\xi$  und  $M$  an der oberen und unteren Seite der Schicht von der Ordnung  $\delta/\lambda$  sind; wir können daher mit Vernachlässigung der Grössen von der Ordnung  $(\delta/\lambda)^2$ , für  $\zeta'$ ,  $\xi$  und  $M$  unter dem Integralzeichen schreiben  $\zeta'_0$ ,  $\xi_0$  und  $M_0$ .

Wir erhalten so:

$$\zeta'_\delta - \zeta'_0 = i \frac{2\pi}{T} \frac{\sin \alpha_1}{v_1} \xi_0 \int_0^\delta \frac{dx}{\varepsilon} + i \frac{2\pi}{T} A M_0 \delta,$$

$$M_\delta - M_0 = i \frac{2\pi}{T} 4\pi A \zeta'_0 \int_0^\delta \varepsilon dx, \quad \xi_\delta - \xi_0 = -i \frac{2\pi}{T} \frac{\sin \alpha_1}{v_1} \zeta'_0 \int_0^\delta \varepsilon dx.$$

Die Einführung der Grenzwerte, welche aus (12), (13), (14) des vorigen Paragraphen folgen, gibt:

$$\frac{a_2}{\varepsilon_2} \cos \alpha_2 e^{i \frac{2\pi \delta \cos \alpha_2}{\lambda_2}} - \frac{1 - a_1}{\varepsilon_1} \cos \alpha_1 =$$

$$= -i \frac{2\pi \sin^2 \alpha_1}{T v_1} (1 + a_1) \int_0^\delta \frac{dx}{\varepsilon} + i \frac{2\pi}{T} 4\pi A^2 v_1 (1 + a_1) \delta, \text{ oder:}$$

$$\frac{a_2}{\varepsilon_2} \cos \alpha_2 e^{i \frac{2\pi \delta \cos \alpha_2}{\lambda_2}} - \frac{1 - a_1}{\varepsilon_1} \cos \alpha_1 =$$

$$= i \frac{2\pi}{T v_1} \frac{1 + a_1}{\varepsilon_1} \left( \delta - \sin^2 \alpha_1 \int_0^\delta \frac{dx}{\varepsilon} \right),$$

$$v_2 a_2 e^{i \frac{2\pi \delta \cos \alpha_2}{\lambda_2}} - (1 + a_1) v_1 = i \frac{2\pi}{T} \frac{1 - a_1}{\varepsilon_1} \cos \alpha_1 \int_0^\delta \varepsilon dx,$$

$$(1 + a_1) \sin \alpha_1 - a_2 \sin \alpha_2 e^{i \frac{2\pi \delta \cos \alpha_2}{\lambda_2}} = -i \frac{2\pi}{T} \frac{\sin \alpha_1}{v_1} \frac{1 - a_1}{\varepsilon_1} \cos \alpha_1 \int_0^\delta \varepsilon dx.$$

Wie man leicht einsieht, sind die beiden letzten Gleichungen identisch; aus den beiden ersten ergibt sich durch Elimination von  $a_2$ :

$$\begin{aligned}
 & (1 + a_1) \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 - (1 - a_1) \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 = \\
 & = -i \frac{2\pi}{T v_2} (1 - a_1) \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \int_0^\delta \frac{\varepsilon}{\varepsilon_2} dx + \\
 & + i \frac{2\pi}{T v_2} (1 + a_1) \sin \alpha_2 \left( \delta - \sin^2 \alpha_1 \int_0^\delta \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} dx \right).
 \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung kann  $a_1$  bestimmt werden, wir finden:

$$a_1 = \frac{\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2 + 2i(p - q)}{\sin 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_2 - 2i(p + q)}, \quad \text{wo:}$$

$$p = \frac{2\pi}{T v_2} \sin \alpha_2 \left( \delta - \sin^2 \alpha_2 \int_0^\delta \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} dx \right),$$

$$q = \frac{2\pi}{T v_2} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \int_0^\delta \frac{\varepsilon}{\varepsilon_2} dx \text{ ist.}$$

Weil  $p$  und  $q$  von der Ordnung  $\delta/\lambda$  sind, darf man mit Vernachlässigung von Grössen höherer Ordnung schreiben:

$$a_1 = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} \left( 1 + 4i \frac{p \sin 2\alpha_1 - q \sin 2\alpha_2}{\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2} \right).$$

Aus dieser Formel ersieht man, dass die Schwingungen parallel zur Einfallsebene eine Phasenverzögerung  $\varphi_s$  erlitten haben, welche bestimmt wird durch:

$$\operatorname{tg} \varphi_s = 4 \frac{p \sin 2\alpha_1 - q \sin 2\alpha_2}{\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2}.$$

Die Intensität dieser Schwingungen wird:

$$a_s^2 = \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}^2(\alpha_1 + \alpha_2)} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_s).$$

Nach einigen Rechnungen findet sich für die Phasenverzögerung:

$$\operatorname{tg} \varphi_s = \frac{4\pi n^2 \cos \alpha_1}{n^2 - 1} \frac{\int_0^\delta \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_2} \right) dx - \sin^2 \alpha_2 \int_0^\delta \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_2} \right) dx}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Es zeigt sich somit, dass der Einfluss der Uebergangsschicht, mit Vernachlässigung höherer Potenzen von  $\delta/\lambda$ , dargestellt wird durch folgende Formeln für die Phasenänderung  $\varphi$  und die Amplitude  $a$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_p &= \frac{4\pi n^2 \cos \alpha_1}{n^2 - 1} \frac{1}{\lambda_1} R, \quad \operatorname{tg} \varphi_s = \frac{4\pi n^2 \cos \alpha_1}{n^2 - 1} \frac{1}{\lambda_1} \frac{R - S \sin^2 \alpha_2}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}, \\ a_p^2 &= \frac{\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_p), \quad a_s^2 = \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}^2(\alpha_1 + \alpha_2)} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_s), \\ R &= \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}\right) dx, \quad S = \int_0^{\delta} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}\right) dx. \end{aligned}$$

Es fragt sich, ob diese Formeln die beobachtete elliptische Polarisation wieder geben. Dazu müssen wir aus ihnen die Ausdrücke für die Phasendifferenz und das Amplitudenverhältniss ableiten, welche Grössen vorzugsweise gemessen worden sind.

Nun ist  $\operatorname{tg} \varphi_p$  immer eine sehr kleine Grösse von der Ordnung  $\delta/\lambda$ ,  $\operatorname{tg} \varphi_s$  aber wird vermöge des Factors  $\cos(\alpha_1 + \alpha_2)$  im Nenner unendlich gross für  $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ$ , was mit den Beobachtungen übereinstimmt. Weil man eben in der Nähe des Polarisationswinkels für den Phasenunterschied einen merklichen Werth gemessen hat, so dürfen wir bei der Besprechung dieses Phasenunterschiedes,  $\varphi_p$  gegen  $\varphi_s$  vernachlässigen, wir erhalten somit für den Phasenunterschied  $d$ :

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{d}{\lambda} = \frac{4\pi n^2 \cos \alpha_1}{n^2 - 1} \frac{1}{\lambda_1} \frac{R - S \sin^2 \alpha_2}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Von dem Vorzeichen dieser Formel hängt es nun ab, ob die Schwingungen parallel zur Einfallsebene eine Phasenverzögerung oder eine Phasenbeschleunigung erlitten haben, ob mithin die Reflexion positiv oder negativ ist. Um das Vorzeichen besser beurtheilen zu können, ist es am besten, die Formel folgenderweise zu transformiren. Es ist:

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 1 - \sin^2 \alpha_1 - \sin^2 \alpha_2,$$

$$\begin{aligned} \text{also:} \quad \operatorname{tg} 2\pi \frac{d}{\lambda} &= \frac{4\pi n^2 \cos \alpha_1}{n^2 - 1} \frac{1}{\lambda_1} R + \\ &+ \frac{2\pi \sin \alpha_1}{n^2 - 1} \frac{1}{\lambda_1} \frac{\sin 2\alpha_1}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2)} [(n^2 + 1)R - S], \\ \operatorname{tg} 2\pi \frac{d}{\lambda} &= \frac{4\pi n^2 \cos \alpha_1}{n^2 - 1} \frac{1}{\lambda_1} R + \frac{2\pi \sin \alpha_1}{n^2 - 1} \frac{1}{\lambda_1} \operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) [(n^2 + 1)R - RS] + \\ &+ \frac{2\pi \sin \alpha_1}{n^2 - 1} \frac{1}{\lambda_1} \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) [(n^2 + 1)R - S]. \end{aligned}$$

Das zweite Glied ist wegen des Factors  $\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)$  soviel grösser als die beiden anderen, dass diese ohne Zweifel

fortgelassen werden können. Dadurch erhalten wir schliesslich für die Phasendifferenz:

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{d}{\lambda} = \frac{2\pi}{n^2 - 1} \frac{\sin \alpha_1}{\lambda_1} \operatorname{tg} (\alpha_1 + \alpha_2) [n^2 + 1] R - S].$$

Für den letzten Factor finden wir:

$$(n^2 + 1) R - S = \int_0^{\delta} \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon)(\varepsilon - \varepsilon_1)}{\varepsilon \varepsilon_1} dx.$$

Wie nun auch die Uebergangsschicht gebildet sein mag, immer ist  $\varepsilon$  zwischen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  gelegen; das Integral ist somit immer positiv und dadurch auch der Phasenunterschied, ebenso wie derjenige, welcher von den Longitudinalschwingungen herrührt. Setzen wir:

$$\frac{2\pi}{(n^2 - 1)\lambda_1} \int_0^{\delta} \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon)(\varepsilon - \varepsilon_1)}{\varepsilon \varepsilon_1} dx = e,$$

dann wird:

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{d}{\lambda} = e \sin \alpha_1 \operatorname{tg} (\alpha_1 + \alpha_2),$$

wo  $e$  der sogenannte Ellipticitätscoefficient ist.

Wir müssen nun das Amplitudenverhältniss näher betrachten. Für diese Grösse finden wir:

$$\frac{a_s^2}{a_p^2} = \frac{\cos^2(\alpha_1 + \alpha_2) + \left(\frac{4\pi n^2 \cos \alpha_1}{n^2 - 1} \frac{1}{\lambda_1}\right)^2 \left(\frac{R - S \sin^2 \alpha_2}{\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}\right)^2}{\cos^2(\alpha_1 - \alpha_2) + \left(\frac{4\pi n^2 \cos \alpha_1}{n^2 - 1} \frac{1}{\lambda_1}\right)^2 R^2 \cos^2(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Wäre die Uebergangsschicht nicht vorhanden, so hätten wir:

$$\frac{a_s^2}{a_p^2} = \frac{\cos^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{\cos^2(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Die Abweichungen von dieser Formel sind so klein, dass wir sie kaum bemerken können. Allein in der Nähe des Polarisationswinkels, wo  $\cos(\alpha_1 + \alpha_2)$  sehr klein wird, müssen die Abweichungen deutlicher hervortreten, und namentlich für  $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ$  wird das Verhältniss (das sogenannte Hauptamplitudenverhältniss):

$$\frac{a_s}{a_p} = k = \frac{4\pi n^2 \cos \alpha_1}{n^2 - 1} \frac{R - S \sin^2 \alpha_2}{\cos^2(\alpha_1 - \alpha_2)},$$

weil wir wieder das zweite Glied im Nenner gegen das erste fortlassen dürfen. Berücksichtigen wir nun, dass  $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ$  ist, so erhält  $k$  schliesslich folgende einfache Gestalt:

$$k = \frac{1}{2 \cos \alpha_1} \cdot \frac{2\pi}{(n^2 - 1) \lambda_1} [(n^2 + 1) R - S]$$

oder:

$$k = \frac{e}{2 \cos J},$$

wo  $J$  den Polarisationswinkel bedeutet.

§ 3. Bei der Vergleichung der erhaltenen Formeln mit den Beobachtungen schien es mir am zweckmässigsten, erst zu untersuchen, inwieweit der Einfluss der Uebergangsschicht an und für sich im Stande ist, die beobachteten Thatsachen zu erklären. Der Phasenunterschied hat zunächst dieselbe Gestalt wie in der Cauchy'schen Formel, welche von Jamin und Quincke auf ihre Beobachtungen erprobt worden ist. Zweitens aber zeigt die Formel für den Ellipticitätscoefficienten, dass bei Umkehrung der beiden Medien das Vorzeichen des Phasenunterschiedes sich ebenfalls umkehrt, eine Eigenthümlichkeit, die von Quincke beobachtet wurde. Eine grosse Schwierigkeit bietet sich aber bei der Betrachtung des Vorzeichens des Ellipticitätscoefficienten. Wenn nämlich  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  ist, so ist  $e$  und damit auch der Phasenunterschied immer positiv, während Jamin bei der Reflexion in Luft auch wohl negative Phasenunterschiede beobachtet hat. Diese Schwierigkeit gilt aber auch von dem Phasenunterschied, welcher von den Longitudinalschwingungen herrührt.

Weiter habe ich aus den beobachteten Werthen der Ellipticitätscoefficienten einen ungefähren Werth für die Dicke der Uebergangsschicht abgeleitet. Diese Werthe sind von derselben Grössenordnung wie die Zahlen, welche Quincke und van der Waals durch Betrachtungen ganz anderer Art für den Radius der Wirkungssphäre gefunden haben. Wir hatten nämlich:

$$e = \frac{2\pi}{(n^2 - 1) \lambda_1} \int_0^{\delta} \frac{(e - \epsilon_1)(\epsilon_2 - e)}{\epsilon \epsilon_1} dx.$$

Setzen wir hierin:



$$\frac{(\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon_2 - \varepsilon)}{\varepsilon \varepsilon_1} = f(x),$$

so ist  $f(x)$  immer positiv, weil  $\varepsilon_2 > \varepsilon > \varepsilon_1$  ist. Wollen wir daher einen Mittelwerth von  $f(x)$  vor das Integralzeichen bringen, so haben wir nur den grössten und den kleinsten Werth von  $f(x)$  zu berechnen.

Der kleinste Werth ist  $f(x) = 0$ , er wird erreicht, wenn  $\varepsilon = \varepsilon_1$  oder  $\varepsilon = \varepsilon_2$  ist; der grösste Werth ist:

$$\left( \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} - 1 \right)^2 = (n-1)^2,$$

und wird erreicht für  $\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$ . Der gesuchte Mittelwerth ist somit:

$$\vartheta (n-1)^2,$$

wo  $1 > \vartheta > 0$  ist. Bringen wir diesen Werth vor das Integralzeichen, so erhalten wir:

$$(21) \quad e = 2\pi \frac{n-1}{n+1} \frac{\vartheta \delta}{\lambda_1}.$$

Hierin ist  $\delta$ , die Dicke der Uebergangsschicht, wie schon früher bemerkt wurde, jedenfalls grösser als der Radius der Wirkungssphäre; daher muss  $\vartheta \delta$  von derselben Grössenordnung als dieser Radius sein.

Für die Berechnung von  $\vartheta \delta$  aus  $e$  könnten wir entweder die Beobachtungen über die Phasenunterschiede oder diejenigen über das Amplitudenverhältniss anwenden. Wir müssen uns aber auf letzteres beschränken, denn die Rechnungen von van der Waals und Quincke beziehen sich nur auf Flüssigkeiten, und für diese gibt Jamin nur den Werth des Hauptamplitudenverhältnisses. Zwar gibt Quincke auch Phasenunterschiede an, aber die Flüssigkeiten, welche er untersucht hat (Wasser und Eisenchlorid), zeigten einen negativen Phasenunterschied und liegen somit ausserhalb unserer Theorie. Der Zusammenhang zwischen Hauptamplitudenverhältniss und Ellipticitätscoefficient ist gegeben durch:

$$k = \frac{e}{2 \cos J};$$

setzen wir hierin für  $e$  den Werth (21), so finden wir:

$$\vartheta \delta = \frac{(n+1) k \cos J}{\pi (n-1)} \lambda_1.$$

Mit Hülfe dieser Formel sind die Werthe von  $\delta\delta$  berechnet für einige Flüssigkeiten, für welche Jamin in seiner Tabelle No. IV<sup>1)</sup> die Werthe von  $k$ ,  $J$  und  $n$  angibt.

	$k$	$J$	$n$	$\delta\delta$
Amylen . .	0,00233	56° 5'	1,487	0,000 001 4 mm
Alkohol . .	0,00208	53 38	1,36	0,000 001 7 „
Benzol . . .	0,00118	56 55	1,503	0,000 000 67 „
Aceton . . .	0,00165	53 55	1,359	0,000 001 3 „
Aethyloxalat .	0,00154	55 45	1,4068	0,000 001 1 „
Chloral . . .	0,00154	55 25	1,461	0,000 000 98 „
Aethylacetat .	0,00117	53 45	4,367	0,000 000 94 „
Methylacetat .	0,00101	53 47	1,359	0,000 000 82 „

Für  $\lambda_1$  (die Wellenlänge in Luft) ist bei dieser Rechnung der Werth 0,00066 mm eingesetzt. Für einige Flüssigkeiten hat van der Waals das Verhältniss der beiden Capillaritätsconstanten  $K$  und  $H$ , welches auch mit dem Radius der Wirkungssphäre im Zusammenhang steht, berechnet. Er findet dann folgende Zahlen:

Aether	Alkohol	Schwefelkohlenstoff	Wasser	Quecksilber
$29 \cdot 10^{-8}$	$25 \cdot 10^{-8}$	$23 \cdot 10^{-8}$	$31 \cdot 10^{-8}$	$49 \cdot 10^{-8}$ mm

Diese Zahlen sind sämmtlich kleiner als  $\delta\delta$ , das Verhältniss  $H/K$  ist aber nur ein gewisser Bruchtheil des Radius. Dagegen findet Quincke<sup>2)</sup> eine viel grössere Zahl:

$$\rho = 0,000 050 \text{ mm,}$$

die aber, wie er selbst anerkennt, wahrscheinlich viel zu gross ist. Jedenfalls können wir also sagen, dass die aus  $e$  berechneten Zahlen für  $\delta\delta$  von derselben Grössenordnung wie der Radius der Wirkungssphäre sind, und damit ist gezeigt, dass der Einfluss der Uebergangsschicht an und für sich im Stande ist, die elliptische Polarisirung von Flüssigkeiten mit positiver Reflexion zu erklären. Der Einfluss der Longitudinalschwingungen lässt sich nicht bestimmen, solange die Constante  $k$  noch unbekannt ist, jedenfalls aber können sie nie einen negativen Phasenunterschied hervorrufen.

1) Jamin, Ann. de chim. et de phys. 31—33. p. 179.

2) Quincke, Pogg. Ann. 137. 1869.

Betrachten wir die Körper mit negativer Reflexion etwas genauer, so finden wir, dass der von uns gegebene Werth von  $e$  negativ werden kann, wenn  $\varepsilon$  nicht zwischen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  liegt, denn:

$$e = \frac{2\pi}{(n^2 - 1) \lambda_1} \int_0^{\lambda} \frac{(e - \varepsilon_1)(\varepsilon_2 - \varepsilon)}{\varepsilon \varepsilon_1} dx.$$

Bei der Reflexion in Luft ist nun immer  $\varepsilon > \varepsilon_1$  und im allgemeinen  $\varepsilon < \varepsilon_2$ ; bei einigen festen Körpern kann aber in der Grenzschicht an der Oberfläche  $\varepsilon > \varepsilon_2$  sein, denn beim Poliren wird auf der Oberfläche ein grosser Druck ausgeübt, und dadurch kann die Dichte dort grösser werden als im Inneren. Dann wird aber  $\varepsilon > \varepsilon_2$ , was einen negativen Werth von  $e$  zur Folge haben kann. Bei Flüssigkeiten hat Jamin die negative Reflexion nur beim Wasser und bei einigen Salzlösungen beobachtet. Ueberdies hat er noch die Beobachtung gemacht, dass, wenn der Salzgehalt zunimmt, der negative Ellipticitätscoefficient kleiner und endlich Null und positiv wird. Vielleicht ist somit die negative Reflexion als eine Eigenthümlichkeit des Wassers zu betrachten; mit Bestimmtheit aber ist darüber nichts zu sagen.

### III. Die Brechungscoefficienten einiger Gemische von Anilin und Alkohol; von W. Johst.

(Mittheilungen aus dem math.-phys. Laboratorium in Königsberg i. Pr. Nr. 8.)

Bei den Untersuchungen über eine etwaige einfache Relation zwischen dem Brechungsexponenten  $n$  eines Körpers und dessen Dichtigkeit  $d$  ist man zu drei verschiedenen Formeln gelangt, durch welche sich diese Relation darstellen lassen soll, dieselben sind:

$$\frac{n^2 - 1}{d} = \text{Const.}, \quad \frac{n - 1}{d} = \text{Const.}, \quad \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \frac{1}{d} = \text{Const.}$$

Diesen Formeln sind Gleichungen nachgebildet, welche zwischen den Brechungsexponenten und Dichtigkeiten von

Flüssigkeiten und deren Gemischen bestehen müssen. Sie lauten für den Fall zweier Flüssigkeiten:

$$(I) \quad \frac{N^2-1}{D} \cdot P = \frac{n_1^2-1}{d_1} p_1 + \frac{n_2^2-1}{d_2} p_2,$$

$$(II) \quad \frac{N-1}{D} \cdot P = \frac{n_1-1}{d_1} p_1 + \frac{n_2-1}{d_2} p_2,$$

$$(III) \quad \frac{N^2-1}{N^2+2} \cdot P = \frac{n_1^2-1}{n_1^2+2} \frac{p_1}{d_1} + \frac{n_2^2-1}{n_2^2+2} \frac{p_2}{d_2}.$$

worin  $n_1$ ,  $d_1$ ,  $p_1$ ;  $n_2$ ,  $d_2$ ,  $p_2$ ;  $N$ ,  $D$ ,  $P$  Brechungsexponenten, Dichtigkeit und Mischungsgewicht für die beiden Flüssigkeiten und das Gemisch bezeichnen.  $P$  ist also  $= p_1 + p_2$ . Die erste der drei Formeln ist aus der Emissionstheorie abgeleitet und durch die Hrn. Schrauf<sup>1)</sup> und Hoeck<sup>2)</sup> experimentell geprüft; bei genauerer Untersuchung stellte sich heraus, dass dieselbe durchaus nicht im Einklange mit den Beobachtungen steht, und dass auch die Bestätigung dieser Herren auf einem zu ungenauen Verfahren basirte. Die Formel II ist eine rein empirische, ihre Gültigkeit prüften die Hrn. Dale und Gladstone<sup>3)</sup> und Landolt<sup>4)</sup> an ihren Beobachtungen und fanden befriedigende Resultate. Erst Hr. Wüllner<sup>5)</sup> hat durch eine Reihe genauer Beobachtungen dargethan, dass weder die Formel  $(n-1)/d = \text{const.}$  noch  $(A-1)/d = \text{const.}$  (worin  $A$  die Refraktionsconstante der Cauchy'schen Formel bedeutet) streng gültig ist, sondern dass sich diese Beziehung nur mehr oder weniger nahe, ähnlich wie das Mariotte'sche Gesetz den einzelnen Substanzen anschliesst. Dass die Formel  $(n-1)/d = \text{const.}$ , also diese Beziehung für jeden beliebigen Strahl, nicht richtig ist, folgert Hr. Wüllner<sup>6)</sup> schon daraus, dass die Brechungsexponenten  $n_\alpha$ ,  $n_\beta$ ,  $n_\gamma$  selbst in verschiedener Weise mit der Temperatur sich ändern. Ich will hieran gleich die Bemerkung knüpfen, dass ich mit der allgemeinen Behauptung des Hrn. Wüllner<sup>7)</sup>

1) Schrauf, Pogg. Ann. 116. p. 193. 1862; 118. p. 359. 1863; 119. p. 461. 1863; 126. p. 177. 1865; 127. p. 175. 1866.

2) Pogg. Ann. 112. p. 347. 1861.

3) Dale u. Gladstone, Phil. Trans. 103. p. 317. 1863.

4) Landolt, Pogg. Ann. 123. p. 595. 1864.

5) Wüllner, Pogg. Ann. 133. p. 1. 1868.

6) L. c. p. 32. 7) L. c. p. 5.

dass eine etwaige Relation streng genommen nur für die Constante  $A$  geprüft werden könne, allerdings nicht einverstanden bin. Soviel ich übersehe, ist es nicht ausgeschlossen, dass wirklich eine unbekannte Relation bestehen könnte, welcher sowohl das  $A$  als auch jedes beliebige  $n$  genüge. Es würde dies doch nur zur Voraussetzung haben, dass die Aenderung der übrigen Constanten  $B$ ,  $C$  u. s. w. irgend einer Dispersionsformel bei Verdünnungen, resp. Verdichtungen der Substanz sich in einer bestimmten Abhängigkeit von der Aenderung des  $A$  befände. Eine solche Abhängigkeit ist aber von vorn herein nicht auszuschliessen, und das um so weniger, da diesen Grössen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  u. s. w. noch nicht bestimmte physikalische Bedeutungen beigelegt werden können, da die Dispersionsformeln nur empirische sind. Die dritte Formel schliesslich ist von den Hrn. H. A. Lorentz<sup>1)</sup> und L. Lorenz<sup>2)</sup> aufgestellt, und zwar sind beide Herren auf theoretischem Wege, und von verschiedenen Gesichtspunkten ausgehend, zu derselben gelangt. Hr. L. Lorenz hat sie nur für die Constante  $A$  nachgewiesen, wogegen sich Hr. H. A. Lorentz dafür ausspricht, dass sie nicht bloss für  $A$ , sondern für jede bestimmte Gattung von Lichtstrahlen gelte. Einer Prüfung unterzogen ist diese Formel von beiden Herren selbst und ferner von den Hrn. K. Prytz<sup>3)</sup> und Landolt. Ihre Resultate bestehen darin, dass die Relation ungefähr denselben Grad von Genauigkeit zeigt, wie Formel (II), dass sie sich aber in Bezug auf die Abweichungen entgegengesetzt verhält, indem sie stets zu kleine Werthe für  $N$  liefert, während die Formel (II) stets zu grosse ergibt.

Zu sämtlichen Beobachtungen, an welchen die Gültigkeit der drei Formeln geprüft worden ist, sind nun erstens Gemische aus Flüssigkeiten benutzt worden, deren Brechungsexponenten nicht sehr weit auseinander liegen; die einzige dazu angewandte stärker brechende Flüssigkeit ist Schwefelkohlenstoff, welcher aber wegen seiner leichten Verdunst-

1) H. A. Lorentz, Wied. Ann. 9. p. 641. 1880.

2) L. Lorenz, Wied. Ann. 11. p. 70. 1880.

3) K. Prytz, Wied. Ann. 11. p. 104. 1880.

barkeit nicht sehr zur Herstellung von Gemischen geeignet ist. Es schien daher von Interesse, zu untersuchen, wie gross sich die Abweichungen ergeben, wenn man Flüssigkeiten nimmt, deren Brechungs- und Dispersionsvermögen möglichst stark differiren. Zwei solche Substanzen eignen sich denn auch besser dazu, eventuell eine neue Formel aufzustellen. Zweitens ist die Refraktionsconstante  $A$  stets nach der einfachen Cauchy'schen Formel  $n = A + (B/\lambda^2)$  berechnet, worin  $\lambda$  die äussere Wellenlänge bedeutet. Nur in einem Falle, nämlich bei Schwefelkohlenstoff hat Hr. Wüllner dieselbe nach der dreiconstantigen Cauchy'schen Dispersionsgleichung  $n = A + B/\lambda^2 + C/\lambda^4$  bestimmt. Diese beiden Gleichungen sind aber aus der allgemeinen Cauchy'schen Formel:

$$\frac{1}{n^2} = a + b \frac{n^2}{\lambda^2} + c \frac{n^4}{\lambda^4}$$

unter ganz besonderen Voraussetzungen abgeleitet, deren Zulässigkeit schon von Hrn. Christoffel<sup>1)</sup> bestritten worden ist. Später hat Hr. Ketteler<sup>2)</sup> an zahlreichen Beispielen dargethan, dass selbst die strenge Cauchy'sche Formel nicht ausreichend ist, die Dispersion darzustellen und noch weit weniger die vorhin genannten. Er führt ebendasselbst die Gleichung:

$$\frac{1}{n^2} = \kappa \lambda^2 + a + \frac{b}{l^2} + \frac{c}{l^4}; \quad l = \frac{\lambda}{n}$$

an, durch welche die Dispersion dargestellt werden könne, findet also, dass der strengen dreiconstantigen Cauchy'schen Formel noch ein Glied zuzufügen sei, welches  $l^2$  im Zähler enthält. Es wäre also möglich, dass die nach der Ketteler'schen Dispersionsformel berechnete Constante  $A = \sqrt{1/a}$  sich anders gegen eine der drei aufgestellten Formeln verhält, wengleich andererseits  $A$  alsdann die Bedeutung verliert, die Grenze zu sein, welcher sich die Brechungsexponenten von Strahlen mit grosser Wellenlänge nähern.

Diese beiden angeführten Punkte veranlassten Hrn. Prof. Voigt, mir eine neue Untersuchung vorzuschlagen und zu

1) Christoffel, Pogg. Ann. 117. p. 27. 1862.

2) Ketteler, Pogg. Ann. 140. p. 1. 1870.

Beobachtungen Gemische aus Anilin und Alkohol zu empfehlen. Das anfangs statt des Anilins in Aussicht genommene Cassiaöl mit noch höherem Brechungsexponenten musste verworfen werden, weil es sich herausstellte, dass Cassiaöl den violetten Streifen des Wasserstoffspectrums absorbirte.

Indem ich zur Beschreibung meiner Beobachtungen übergehe, schicke ich voraus, dass dieselben zum Unterschiede von denjenigen der oben genannten Herren sämmtlich bei nahezu constanter Temperatur, und zwar in der Nähe von  $16,3^{\circ}$  C. gemacht und auf  $16,3^{\circ}$  C. reducirt wurden. Die grössten Abweichungen betrugen  $0,4^{\circ}$  nach beiden Seiten hin, meistens nur  $0,2^{\circ}$  und darunter. Die Methode zur Bestimmung der Brechungsexponenten war die der kleinsten Ablenkung. Zu den Messungen der Winkel diente ein vortreffliches Spectrometer von Hrn. Heyde in Dresden. Die Theilung desselben gab direct  $10'$  an. Die genauere Ablesung erfolgte an zwei um  $180^{\circ}$  voneinander abstehenden Mikrometermikroskopen bis auf einen Trommeltheil oder  $2''$ . Das Fadenkreuz des Fernrohres wurde so gestellt, dass der verticale Faden parallel der Spalte war. Zur Aufnahme der Flüssigkeit diente ein Hohlprisma von Steinheil (die planparallelen Verschlussplatten durch blosse Adhäsion festgehalten). Der Parallelismus der Platten war so vollkommen, dass die durch das leere Prisma erzeugte Ablenkung sich der Beobachtung entzog. Da die Platten während der ganzen Untersuchung nicht abgenommen wurden, so war der brechende Winkel constant, er betrug  $60^{\circ} 8' 42''$ . In der zum Füllen des Prismas dienenden Oeffnung wurde mittels eines Korkes ein Thermometer befestigt. Dieser Korkverschluss erwies sich gleichzeitig als ausreichend, jede Verdunstung der Flüssigkeit zu verhindern. Zur Verhütung von Verschiebungen wurde das Prisma auf dem Tischchen mittels Talg befestigt. Die genaue Einstellung des Fernrohres senkrecht zur Drehungsaxe, ferner die des Prismas u. s. w. wurde nach der bekannten Methode bewirkt. Den Beobachtungen wurden die drei Strahlen  $\alpha \beta \gamma$  des Wasserstoffspectrums und ausserdem die Natronlinie  $D$  unterworfen.



Diese letztere zeigte sich bei Anilin und den anilinhaltigen Gemischen deutlich in zwei Streifen gesondert, während sie bei Alkohol und den an Alkohol reicheren Gemischen in eine Linie zusammenschmolz. Die Einstellung des Fadenskreuzes geschah stets auf die Mitte des Bildes, also bei der Natronlinie im Falle zweier Streifen zwischen dieselben. Für jede Lichtlinie wurden meistens vier Beobachtungen gemacht, und zwar in folgender Reihenfolge: zuerst zwei Beobachtungen von  $D$ , dann viermal immer abwechselnd  $\alpha \beta \gamma$  und schliesslich wieder einige Beobachtungen für  $D$ . Es wurde ferner immer der doppelte Ablenkungswinkel  $2\delta$  bestimmt. Das zur Bestimmung der Temperatur im Prisma benutzte Thermometer war in Fünftelgrade eingetheilt und die Theilung so gross, dass man die Temperatur auf  $0,02^\circ$  schätzen konnte.

Die Herstellung der Gemische geschah mit der Waage und die Bestimmung der Dichtigkeit mittelst eines Pyknometers von ca. 25 ccm Inhalt und der Waage und ebenfalls für die Temperatur von  $16,3^\circ$ . Das Pyknometer wurde zu dem Zwecke in ein Wasserbad von  $16,3^\circ$  C. gestellt, welches mittelst einer kleinen Turbine in stetiger Bewegung erhalten wurde. Sämmtliche Gewichte wurden auf den luftleeren Raum reducirt und die Dichtigkeit in Bezug auf Wasser von  $16,3^\circ$  C. angegeben.

Ich will jetzt noch kurz der Hauptschwierigkeiten Erwähnung thun, die sich im Laufe meiner Untersuchung einstellten, und der Art und Weise der Abhilfe.

1. Wurde die Flüssigkeit im Prisma durch Erwärmung auf die erforderliche Temperatur von  $16,3^\circ$  gebracht, und war es auch nur durch eine um  $1^\circ$  und ohne Einwirkung von directen Wärmestrahlen, so wurde das Bild trübe und erst nach einiger Zeit (ca.  $\frac{1}{2}$  Stunde) wieder klar, ein Zeichen dafür, dass die Temperatur in der Flüssigkeit merklich constant war. Indessen zeigten dann eine halbe Stunde und länger fortgesetzte Beobachtungen eines Strahles eine stetige Aenderung der auf  $16,3^\circ$  reducirten Brechung nach derselben Seite hin. Erst später wurde dieselbe constant. Die Ursache schrieb ich dem Umstande zu, dass es nach



der Aenderung der Temperatur einer so geraumen Zeit bedurfte, bis die Temperatur der Flüssigkeit und des Quecksilbers dieselbe waren; vorher waren also die Temperaturcorrectionen unrichtig bestimmt. Um diesem Uebelstande abzuhelpen, füllte ich am Tage vorher das Prisma und stellte der ganzen Apparat zur Beobachtung bereit, liess alsdann des Abends das Zimmer erwärmen, sodass sich am Morgen die gewünschte Temperatur von nahe  $16,3^{\circ}$  vorfand, die dann noch geraume Zeit vor Beginn der Beobachtungen nach Bedürfniss regulirt wurde.

2. Die Reinigung des Prismas mit absolutem Alkohol und nachherigem Trocknen durch Lufteinblasen stellte sich als lange nicht ausreichend heraus. Es muss sich gewissermassen Flüssigkeit in die Poren des mattgeschliffenen Glases einsaugen, welche erst nach langer Zeit, mitunter nach acht Stunden und noch mehr, sich löst. Da ich diese Thatsache erst im Laufe meiner Untersuchung feststellte, so mussten alle vorher gemachten Beobachtungen als unzuverlässige verworfen werden. Der Sache selbst wurde dadurch abgeholfen, dass ich ca. zwölf Stunden vorher das Prisma mit einem Gemisch von nahezu derselben Zusammensetzung wie das zu untersuchende füllte, dasselbe nachher entfernte und mit dem definitiv zu beobachtenden Gemisch frisch füllte.

3. Die Verdunstung, resp. das Wasseraufsaugen des Alkohols, wenn derselbe mit der Luft in Berührung kam, wie z. B. beim Füllen des Pyknometers, zeigte sich von so starkem Einfluss, dass dieselbe grössere Vorsicht gebot. Es wurde daher ein Heber benutzt, dessen einen Schenkel ich mittelst Gummischlauch fest mit dem einen Röhrchen des Pyknometers verband, und durch welchen alsdann das letztere gefüllt wurde. Dieselbe Vorrichtung benutzte ich zum Füllen des Prismas.

4. Ein weiterer Uebelstand zeigte sich darin, dass das Bild manchmal überhaupt nicht ganz klar wurde. Obgleich dies an den Strahlen  $\alpha \beta \gamma$  kaum wahrzunehmen war, so zeigte es sich doch deutlich an der Natronlinie, wenn diese, wie bei Anilin, aus zwei Streifen bestand. Es gesellte sich dann nämlich zu diesen beiden noch ein dritter, weniger

heller Streifen, der das ganze Bild unklar machte und das Einstellen sehr erschwerte. Dass dies nur von Temperaturdifferenzen in der Flüssigkeit herrühren konnte, bestätigte ich dadurch, dass ich die Flüssigkeit schüttelte, wodurch wieder ein klares Bild, aus zwei hellen Streifen bestehend, hervortrat. Diesem Uebelstande konnte ich nicht abhelfen, und derselbe dürfte auch die Hauptursache der Beobachtungsfehler sein.

Ich bin über die genannten Schwierigkeiten nicht stillschweigend hinweggegangen, weil ihre Mittheilung bei ähnlichen Untersuchungen doch vielleicht als Anhaltspunkt dienen könnte. Ich selbst habe solche und ähnliche Angaben oft vermisst. Erscheinungen an dem Geissler'schen Rohre, wie Hr. Wüllner sie beobachtet, sind bei mir nicht vorgekommen. Der violette Streifen  $\gamma$  war allerdings auch nicht immer gleich hell, dies war aber wohl hauptsächlich der Stärke der Batterie und dem Gemisch selbst zuzuschreiben, indem sich bei Anilin diese Linie weniger hell zeigte, als bei Alkohol.

In der folgenden Tabelle I (p. 56) sind  $v_1$  und  $v_2$  die genauen Volumenverhältnisse  $p_1/d_1 : p_2/d_2$  des im Gemisch enthaltenen Anilins und Alkoholes; das Gemisch selbst ist in der Rubrik „Substanz“ z. B. mit 1 An.:1 Al. bezeichnet, wenn dasselbe nahezu diese Volumenzusammensetzung hat. Die Brechungsexponenten sind mit  $n$  und zugefügtem Index, welcher den betreffenden Lichtstrahl angibt, und die Dichtigkeit mit  $d$  bezeichnet.  $A$  bedeutet die Constante  $\sqrt{1/a}$  der Ketteler'schen Formel,  $A_1$  die nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmte Constante  $a_1$  der einfachen Cauchy'schen Gleichung:

$$n = a_1 + \frac{b_1}{\lambda^2} + \frac{c_1}{\lambda^4}$$

und  $A_2$  die Constante  $\sqrt{1/a}$  der strengen Cauchy'schen Formel:

$$\frac{1}{n^2} = a + \frac{bn^2}{\lambda^2} + \frac{cn^4}{\lambda^4}.$$

Ich habe mich nicht mit der Ketteler'schen Constante  $A$  allein begnügt, weil ich prüfen wollte, ob sich dieselbe

thatsächlich anders verhält, wie  $A_1$  und  $A_2$ . Die Grösse  $A_2$  ist nicht nach der Methode der kleinsten Quadrate, sondern in der Weise bestimmt, dass ich dieselbe aus den vier Combinationen von je drei Strahlen berechnet und aus den vier erhaltenen Werthen das Mittel genommen habe. Es lässt sich dies nämlich ohne bedeutende Rechnung machen, wenn man die vorher bestimmten Werthe der Ketteler'schen Constanten dazu benutzt. Tab. II (p. 56) enthält für alle Gemische die Constanten der Ketteler'schen und Cauchy'schen Dispersionsformel, Tab. III (p. 57) die nach dem im Eingang gegebenen Formeln (II) und (III) berechneten Werthe der Grössen  $n$  und  $A$  verglichen mit den beobachteten.

Das Zeichen  $A$  bedeutet die Differenz zwischen Beobachtung und Berechnung. Bei der Berechnung dienten folgende Zahlen als Verhältnisse der Wellenlängen:

$$\lambda_a = 2,4263, \quad \lambda_D = 2,1786, \quad \lambda_\beta = 1,7973, \quad \lambda_\gamma = 1,6043.$$

Es sind  $\lambda_a$ ,  $\lambda_D$ ,  $\lambda_\beta$  den Angaben des Hrn. Ångström<sup>1)</sup> und  $\lambda_\gamma$  der Abhandlung des Hrn. Wüllner entnommen.

Bevor ich die genauere Besprechung der Tabelle beginne, will ich zunächst den Genauigkeitsgrad angeben, welcher den Beobachtungen beizulegen ist. Da ich bei nahezu constanter Temperatur beobachtet habe, so lassen sich die vom Einstellen auf das Minimum und von der Temperaturablesung herrührenden Beobachtungsfehler zusammen angeben. Die Abweichungen bei den für jeden Strahl gemachten vier Beobachtungen betrugen meistens nur zwei bis drei Trommeltheile, im Maximum sechs, für den doppelten Ablenkungswinkel  $2\delta$ . Der mittlere Fehler von  $\delta$  dürfte also hierdurch auf einen Trommeltheil reducirt sein, wodurch der Brechungsexponent um weniger als eine Einheit der fünften Stelle beeinflusst wird. Der brechende Winkel wurde aus mehreren Beobachtungen als Mittel berechnet und kann, da die Beobachtungen selbst nur um höchstens zwei Trommeltheile abweichen, der Fehler als ohne Einfluss auf den eigentlichen Zweck der Untersuchung betrachtet werden, weil er sämmtliche Brechungsexponenten in demselben Sinne beeinflusst.

1) Ångström, Pogg. Ann. 123. p. 489. 1864.

Tabelle I.

Substanz	Beobachtete Werthe									
	$v_1$	$v_2$	$d$	$n_\infty$	$n_D$	$n_g$	$n_f$	Ketteler $A$	Cauchy $A_1$	Cauchy $A_2$
Anilin . .	—	—	1,02478	1,58135	1,58818	1,60632	1,62271	1,55631	1,55751	1,55618
3 An. : 1 Al.	3,01029	1,00000	0,97628	1,52890	1,53443	1,54890	1,56186	1,50981	1,50951	1,50844
2 An. : 1 Al.	2,00000	1,00015	0,93588	1,51088	1,51596	1,52921	1,54104	1,49365	1,49297	1,49206
1 An. : 1 Al.	1,00000	1,00147	0,92284	1,47465	1,47886	1,48979	1,49943	1,46025	1,45948	1,45889
1 An. : 2 Al.	1,00000	2,01369	0,88467	1,43757	1,44095	1,44960	1,45713	1,42634	1,42509	1,42476
1 An. : 3 Al.	1,00000	3,03600	0,86470	1,41882	1,42178	1,42932	1,43580	1,40818	1,40766	1,40744
Alkohol . .	—	—	0,80810	1,36225	1,36403	1,36836	1,37187	1,35549	1,35498	1,35495

Tabelle II.

Substanz	Const. der Ketteler'schen Dispersionsformel					Const. der Cauchy'schen Formel				
	$\frac{1}{n^2}$	$a + \frac{b n^2}{\lambda^2} + c \frac{n^4}{\lambda^4} + k \frac{\lambda^2}{n^2}$	$-b$	$-c$	$k$	$n = a_1 + \frac{b_1}{\lambda^2} + \frac{c_1}{\lambda^4}$	$a_1$	$b_1$	$c_1$	
Anilin . .	0,41287	0,02935	0,00295	0,00001	0,00001	1,55781	0,11574	0,13151		
3 An. : 1 Al.	0,43869	0,02687	0,00384	0,00015	0,00015	1,50951	0,09752	0,09529		
2 An. : 1 Al.	0,44823	0,02581	0,00414	0,00018	0,00018	1,49297	0,09060	0,08470		
1 An. : 1 Al.	0,46897	0,02430	0,00411	0,00016	0,00016	1,45948	0,07886	0,06259		
1 An. : 2 Al.	0,49154	0,02194	0,00394	0,00019	0,00019	1,42509	0,06606	0,04186		
1 An. : 3 Al.	0,50429	0,02178	0,00293	0,00009	0,00009	1,40766	0,06031	0,03108		
Alkohol . .	0,54426	0,01772	0,00010	0,00007	0,00007	1,35498	0,04217	0,00528		

Tabelle III.

Substanz	Werthe, berechnet nach der Formel (II)													
	$n_x$	$n_D$	$n_\beta$	$n_\gamma$	$A$	$A_1$	$A_5$	$-\Delta n_{st}$	$-\Delta n_D$	$-\Delta n_\beta$	$-\Delta n_\gamma$	$-\Delta A$	$-\Delta A_1$	$-\Delta A_5$
3 An. : 1 Al.	1,53057	1,53618	1,55099	1,56426	1,50994	1,51095	1,50971	167	175	209	240	13	144	127
2 An. : 1 Al.	1,51282	1,51801	1,53167	1,54387	1,49371	1,49455	1,49344	194	205	246	283	6	168	138
1 An. : 1 Al.	1,47670	1,48104	1,49239	1,50245	1,46064	1,46114	1,46030	205	218	260	302	39	166	141
1 An. : 2 Al.	1,43937	1,44285	1,45186	1,45972	1,42641	1,42657	1,42601	180	190	226	259	7	148	125
1 An. : 3 Al.	1,42026	1,42331	1,43113	1,43790	1,40887	1,40886	1,40843	144	153	181	210	69	120	99

Werthe, berechnet nach der Formel (III)

Substanz	$\Delta A$													
	$n_c$	$n_D$	$n_i$	$n_f$	$A$	$A_1$	$A_2$	$\Delta n_a$	$\Delta n_D$	$\Delta n_f$	$\Delta A$	$\Delta A_1$	$\Delta A_2$	
3 An. : 1 Al.	1,52789	1,53385	1,54771	1,56055	1,50777	1,50871	1,50754	101	108	119	131	204	80	90
2 An. : 1 Al.	1,50963	1,51463	1,52777	1,53946	1,49112	1,49188	1,49085	125	133	144	158	253	109	121
1 An. : 1 Al.	1,47308	1,47724	1,48602	1,49750	1,45770	1,45818	1,45736	157	162	177	193	255	135	153
1 An. : 2 Al.	1,43618	1,43950	1,44801	1,45537	1,42383	1,42385	1,42343	139	145	159	176	251	124	133
1 An. : 3 Al.	1,41759	1,42051	1,42791	1,43427	1,40669	1,40663	1,40625	123	127	141	153	149	103	119

Der durch die Messung bedingte mittlere Fehler würde also eine Einheit der fünften Decimale nicht überschreiten, wenn nicht der schon erwähnte Uebelstand des zuweilen unklaren Bildes einträte. Um hierüber eine Vorstellung zu erhalten, habe ich Versuche mit Anilin zu verschiedener Zeit gemacht. Die Brechung erwies sich merklich als dieselbe. Dagegen erhielt ich in den einzelnen partiellen Dispersionen, wie  $n_D - n_a$ , etc. Differenzen, welche die vorher angeführten Beobachtungsfehler überschritten, und die ich durch jenen Uebelstand erkläre. Am meisten wich, wie zu erwarten war, die Natronlinie ab. Die an den Strahlen  $\alpha \beta \gamma$  beobachteten Differenzen, obgleich an diesen, wie vorhin bemerkt, die Unklarheit des Bildes wenig wahrzunehmen war und die Einstellung auch weiter nicht erschwert wurde, erkläre ich mir dadurch, dass das Bild doch bei Beobachtungen an verschiedenen Tagen nicht immer in der gleichen Weise scharf ausgeprägt ist (namentlich bei  $H_7$ ), und dass man geneigt ist, bei einer und derselben Beobachtungsreihe immer auf eine bestimmte Stelle des Fadenkreuzes einzustellen, die aber nicht immer die Mitte des Bildes ist. Hierdurch werden dann jene bald hintereinander gemachten vier Beobachtungen jedes Strahles nahezu gleich, ohne indess immer richtig zu sein. Ich habe mich überzeugt, dass es nicht zu niedrig gegriffen ist, wenn ich den hierdurch bedingten Beobachtungsfehler auf drei Trommeltheile für  $\delta$ , d. h. auf ca. zwei Einheiten der fünften Decimale für  $n$  schätze. Hiernach mag es vielleicht scheinen, dass es überflüssig gewesen ist, für jeden Strahl vier Beobachtungen zu machen, dagegen kann ich aber anführen, dass dies zum Theil deshalb geschehen ist, um eine Controle zu haben, ob während der Beobachtungen auch wirklich die Temperatur der Flüssigkeit und des Thermometers dieselbe war.

Weitere, die Untersuchung beeinflussende Fehler, können bei der Dichtigkeitsbestimmung und der Herstellung des Gemisches gemacht werden. Ich habe gefunden, dass diese Fehler den nach den Formeln (II) und (III) berechneten Werth  $N$  um eine Grösse unsicher machen, die im Maximalfalle einen Werth von einundeinhalb Einheiten erreichen kann. Es

ist dabei aber zu bemerken, dass durch diesen Fehler alle Beobachtungen mit demselben Gemisch in gleicher Weise, und dass ferner die verschiedenen Gemische durch den von  $d_1$  und  $d_2$  herrührenden Theil in demselben Sinne beeinflusst werden.

Alles zusammen genommen will ich im ungünstigsten Falle den beobachteten Brechungsexponenten eine Unsicherheit von drei Einheiten der fünften Decimale für Anilin und Alkohol und von vier Einheiten für deren Gemisch zuge stehen, will aber gleichzeitig erwähnen, dass sie in den meisten Fällen sicherer sein werden.

Indem ich jetzt auf den Inhalt der Tabelle eingehe, hebe ich zunächst hervor, dass in Uebereinstimmung mit dem auf p. 49 Erwähnten auch bei meinen Gemischen die Formel (II) negative und (III) positive Differenzen zwischen Beobachtung und Berechnung ergeben hat. Man sieht ferner, dass die Differenzen in beiden Fällen grösser werden, je mehr man sich dem Gemisch 1 An.: 1 Al. nähert, und je weiter man sich in den stärker gebrochenen Theil des Spectrums begibt. In letzterer Hinsicht scheint aber die Formel (III) einen Vorzug vor II zu haben, indem bei ihr die Zunahme der Abweichungen eine bedeutend langsamere ist. Die Frage, welche von den beiden Formeln die Beobachtungen genauer wiedergibt, lässt sich wohl kaum nach dieser Tabelle beantworten, da die Differenzen, welche (III) liefert, doch nicht soviel kleiner als nach (II) sind, als dass man mit Sicherheit daraus eine Folgerung ziehen könnte.

Die nach den Cauchy'schen Gleichungen bestimmten Constanten  $A_1$  und  $A_2$  schliessen sich dem besprochenen Verhalten der Brechungsexponenten selbst an, was auch in der Natur der Sache liegt, da sie den Brechungsexponenten für den Grenzstrahl darstellen.

In dem System der nach der Ketteler'schen Dispersionsformel berechneten Constanten  $k$  erblickt man eine Unregelmässigkeit, die mich zu untersuchen veranlasste, wie sich denn die Ketteler'schen Constanten gegen die Beobachtungsfehler verhalten. Von den erhaltenen Resultaten will ich hier nur diejenigen anführen, welche sich bei den Grund-



stoffen Anilin und Alkohol ergaben, indem diese genügen, durch Interpolation auch die übrigen annähernd kennen zu lernen. Es ergibt sich für Anilin:

$$\begin{array}{llll}
 \frac{\partial A}{\partial n_a} = -30 & \frac{\partial A}{\partial n_D} = +55 & \frac{\partial A}{\partial n_\beta} = -36 & \frac{\partial A}{\partial n_\gamma} = +11 \\
 \frac{\partial b}{\partial n_a} = -21 & \frac{\partial b}{\partial n_D} = +42 & \frac{\partial b}{\partial n_\beta} = -31 & \frac{\partial b}{\partial n_\gamma} = +13 \\
 \frac{\partial c}{\partial n_a} = +10 & \frac{\partial c}{\partial n_D} = -19 & \frac{\partial c}{\partial n_\beta} = +15 & \frac{\partial c}{\partial n_\gamma} = -6 \\
 \frac{\partial k}{\partial n_a} = -4 & \frac{\partial k}{\partial n_D} = +6 & \frac{\partial k}{\partial n_\beta} = -4 & \frac{\partial k}{\partial n_\gamma} = +1,
 \end{array}$$

und für Alkohol:

$$\begin{array}{llll}
 \frac{\partial A}{\partial n_a} = -34 & \frac{\partial A}{\partial n_D} = +65 & \frac{\partial A}{\partial n_\beta} = -48 & \frac{\partial A}{\partial n_\gamma} = +18 \\
 \frac{\partial b}{\partial n_a} = -50 & \frac{\partial b}{\partial n_D} = +102 & \frac{\partial b}{\partial n_\beta} = -85 & \frac{\partial b}{\partial n_\gamma} = +34 \\
 \frac{\partial c}{\partial n_a} = +29 & \frac{\partial c}{\partial n_D} = -62 & \frac{\partial c}{\partial n_\beta} = +58 & \frac{\partial c}{\partial n_\gamma} = -26 \\
 \frac{\partial k}{\partial n_a} = -5 & \frac{\partial k}{\partial n_D} = +8 & \frac{\partial k}{\partial n_\beta} = -5 & \frac{\partial k}{\partial n_\gamma} = +2.
 \end{array}$$

Aus diesen Werthen und aus der angegebenen Grösse der Beobachtungsfehler ist allerdings ersichtlich, dass sich jene Unregelmässigkeiten wohl durch die Ungenauigkeit der Beobachtungen erklären lassen.

Die Werthe für  $\partial A / \partial n_a$  etc. zeigen, dass bei dem Genauigkeitsgrad meiner Beobachtungen  $A$  selbst sehr leicht um eine Einheit der dritten Stelle und noch mehr unsicher werden kann, und dass somit die  $AA$ , welche die Formel (II) liefert, sich innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler befinden. Man könnte daher in Zweifel sein, ob nicht wirklich die Gleichung  $(A-1)/d = \text{Const.}$  als streng erfüllt anzunehmen sei. Selbst die Thatsache, dass sämtliche  $AA$  positiv sind, würde nichts daran ändern, denn dies könnte ja von der Ungenauigkeit der Werthe  $A$  für Anilin und Alkohol herrühren, welche sämtliche Gemische in demselben Sinne beeinflussen. Ich glaube indes, diese Annahme durch folgende Betrachtung als unwahrscheinlich darzustellen, wenn ich sie auch nicht widerlegen kann. Die Rubrik für  $k$



zeigt, dass entweder das für Anilin oder das für Alkohol berechnete  $k$  zu klein sein wird, und die Gleichungen zeigen, dass dann auch das entsprechende  $A$  zu klein ausgefallen sein wird. Dadurch werden aber die Differenzen  $\Delta A$  bedeutend grösser. Die zu Formel (III) gehörigen  $\Delta A$  werden kleiner, und es ist leicht möglich, dass in Wirklichkeit auch diese Differenzen kleiner ausfallen wie die  $\Delta A$  nach (II), analog  $\Delta n$  und  $\Delta A_1$ . Jedenfalls aber sieht man, dass weit genauere Beobachtungen nöthig sind, wenn man die Constante  $A$  der Ketteler'schen Formel einer näheren Untersuchung unterwerfen will. Es würde dies z. B. dadurch zu erreichen sein, dass man viele Lichtstrahlen mit dem möglichen Grad von Genauigkeit beobachtet und dann die Constanten nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt. Diese Methode ist ja auch von Hrn. Ketteler bei der Prüfung seiner Formel in Anwendung gebracht und erst dadurch z. B. die Existenz von  $k$  begründet, denn eine Bestimmung aus vier Linien gibt über dasselbe keinen Aufschluss, da es selbst nur Werthe hat, die in die Grenzen der Beobachtungsfehler fallen. Aus dem Umstande, dass  $k$  stets positiv ist, lässt sich wenig schliessen, da ja auch die Ungenauigkeit der Wellenlänge  $\lambda$  ins Spiel kommt, welche überall, wenn auch nicht erheblich, so doch in demselben Sinne wirkt. Die Constanten der Cauchy'schen Formeln sind lange nicht in demselben Grade empfindlich gegen die Beobachtungsfehler; es ergibt sich hier  $\partial A / \partial n$  im Durchschnitt gleich ca. 5. Ob nun die grossen Aenderungen bei der Ketteler'schen Formel nur durch die Constante  $k$  bedingt sind, oder ob dieselben davon herrühren, dass man überhaupt eine Constante mehr in die Dispersionsgleichung aufnimmt, habe ich nicht festgestellt.

Bei Anwendung der Formel (I) ergeben sich Differenzen, welche sieben Einheiten der dritten Decimale erreichen, und dies ist der Grund, weshalb ich dieselben nicht in die Tabelle aufgenommen habe.

Was die Aufstellung einer neuen Formel anbelangt, so will ich hier nur einige Andeutungen geben, da ich gedenke, in kurzer Zeit auf eine Untersuchung dieser Art zurückzu-

kommen. Man hat für diesen Zweck einen Anhaltcpunkt durch den mehrfach erwähnten Umstand, dass die Formel (II) zu grosse, und die Formel (III) zu kleine Werthe für  $N$  ergibt. Es ist also darauf zu achten, dass man der Relation (II) eine Formel zur Seite stellt, für welche  $N$  kleiner, oder der Relation (III) eine solche, für welche  $N$  grösser ausfällt. Diese Bedingung wird erfüllt von der Formel:

$$\frac{\sqrt{n}-1}{a} = \text{Const.}, \text{ resp. } \frac{n-1}{n+2} \frac{1}{d} = \text{Const.},$$

welche aus (II) und (III) dadurch entstehen, dass man  $n$  für  $n^2$  setzt. Ich habe mich überzeugt, dass diese Formeln auch in mancher anderen Hinsicht bessere Resultate liefern als (II) und (III). So werden z. B. bei einem und demselben Gemisch die Differenzen  $\Delta$  für das ganze Spectrum constanter. Ebenso bleiben die Differenzen für einen und denselben Lichtstrahl constanter, wenn man von den anilinhaltigeren Gemischen allmählich zu den alkoholreicheren übergeht. Nur ein Nachtheil zeigt sich darin, dass sie nicht mehr wie die Formeln (II) und (III) beim Gemisch 1 An.: 1 Al. die grössten Differenzen liefern, d. h. dass sie nicht mit demselben Grade von Genauigkeit für die anilinhaltigeren, wie für die entsprechenden alkoholreicheren Gemische anwendbar sind. Aus diesem Grunde verzichte ich auch auf die Aufstellung einer vollständigen Tabelle und begnüge mich, zum Vergleich die Werthe anzugeben, welche sich für die Differenzen  $\Delta A_1$  und  $\Delta A_2$  nach der Formel  $(\sqrt{n}-1)/d = \text{Const.}$  ergeben.

	3 An. : 1 Al.	2 An. : 1 Al.	1 An. : 1 Al.	1 An. : 2 Al.	1 An. : 3 Al.
$\Delta A_1$	-50	-45	-33	-29	-19
$\Delta A_2$	-33	-25	-8	-6	+ 2

IV. *Bemerkungen zu Hrn. E. Lommel's Abhandlung „Ueber die Newton'schen Staubringe“<sup>1)</sup>; von Karl Exner.*

Um die seit längerer Zeit mit Hrn. Lommel über die Erklärung des Phänomens der Staubringe geführte Polemik zu einem endlichen Schlusse zu bringen, habe ich in meiner letzten Publication über diesen Gegenstand<sup>2)</sup> die beiden von Hrn. Lommel und mir gegebenen Theorien dieses Phänomens einer Prüfung durch messende Versuche unterworfen. Die angestellten Messungen ergaben die Unrichtigkeit der von Hrn. Lommel aus seiner Theorie abgeleiteten Sätze, hingegen die Richtigkeit meiner eigenen Formeln.

So einfach diese Sachlage ist, hat doch Hr. Lommel geglaubt, Folgendes erwidern zu sollen: „Ein Haupteinwand, mit welchem sich Hr. Exner in seiner letzten Publication vorzugsweise beschäftigt, besteht im Folgenden. Indem Hr. Exner ohne weiteres  $N_1 = N_2$  setzt, folgert er, angeblich aus meiner Theorie, in der That aber aus dieser seiner unrichtigen Unterstellung, dass, wenn die Bestäubungsfläche aus der Parallellage in die schiefste Lage übergeführt wird, das Phänomen einfach ungeändert bleiben müsste. Diese mir untergeschobene Theorie, mit welcher ich selbst aber nichts zu thun habe, widerlegt nun Hr. Exner, indem er numerische Werthe daraus ableitet und diese unter der unrichtigen Bezeichnung „nach Lommel's Theorie“ mit beobachteten Werthen zusammenstellt. Die so berechneten Werthe stimmen allerdings mit den Beobachtungen nicht überein; wohl aber thun dies die wirklich nach meiner Theorie berechneten.“

Diese Darstellung entspricht nicht dem Sachverhalte: Wenn ich im 11. Bande der Annalen  $N_1 = N_2$  gesetzt habe, so steht dies in keinem Zusammenhange mit den numerischen Werthen, welche ich im 17. Bande der Annalen unter der Bezeichnung: „Nach Lommel's Theorie“, mit den beobachte-

1) Lommel, Wied. Ann. 18. p. 613. 1883.

2) Exner, Wied. Ann. 17. p. 149. 1882.

ten Werthen zusammengestellt habe. Ich habe bei dieser experimentellen Prüfung überhaupt keine Consequenz aus der Theorie des Hrn. Lommel gezogen, vielmehr durch messende Versuche in directester Weise und ohne jede theoretische Zwischenbetrachtung einen Satz widerlegt, welchen Hr. Lommel mit Betonung als eine Consequenz seiner Theorie hingestellt hat. Wenn Hr. Lommel behauptet, dass die „wirklich“ nach seiner Theorie berechneten Werthe mit den Beobachtungen übereinstimmen, so beruht dies auf einem lapsus memoriae, da der Satz, auf welchen sich jene Werthe beziehen, von Hrn. Lommel selbst seither als unrichtig zurückgenommen worden ist.

Um alles dies deutlicher zu machen, habe ich in Erinnerung zu bringen, wie jene Zahlen entstanden sind, welche unter der Bezeichnung: „Nach Lommel's Theorie“, mit den beobachteten Werthen zusammengestellt worden sind.

Hr. Lommel<sup>1)</sup> hat zuerst auf Grund von Beobachtungen den Satz aufgestellt, nach welchem die Durchmesser der Ringe unabhängig sein sollen von dem zwischen der getrühten und spiegelnden Fläche enthaltenen Winkel und nur bedingt durch die mittlere Entfernung der wirksamen Staubtheilchen von der Spiegelfläche, und hat diesen Satz sodann theoretisch abgeleitet.<sup>2)</sup> Hr. Lommel hat in einer späteren Abhandlung auf Grund „zahlreicher Versuche“ und ausführlichster Beschreibung derselben diesen Satz wiederholt<sup>3)</sup>, in dem Capitel „Diffusions- oder Beugungstheorie“ den Versuch als ein experimentum crucis für die Richtigkeit seiner Theorie in Anspruch genommen und in dem Capitel „Theorie der Newton'schen Staubringe“, diesen Satz neuerdings aus seiner Theorie abgeleitet und wie folgt ausgesprochen<sup>4)</sup>: „Wir sehen also, dass in voller Uebereinstimmung mit dem Ergebniss der Beobachtungen und Messungen die Durchmesser der Ringe unabhängig sind von dem zwischen der bestäubten und spiegelnden Fläche enthaltenen Winkel und nur bedingt

1) Lommel, Pogg. Ann. Ergbd. 8. p. 237 u. 238. 1878.

2) Lommel, l. c. p. 240 u. 241.

3) Lommel, Wied. Ann. 8. p. 195, 196 u. 197. 1879.

4) Lommel, l. c. p. 234.

werden durch den Abstand des Schwerpunktes (Mittelpunktes) der Bestäubung von der Spiegelfläche.“

Es kann also keinem Zweifel unterliegen, dass Hr. Lommel den Satz, nach welchem bei der Drehung des Bestäubungsblättchens um seinen Mittelpunkt die Radien der Ringe ungeändert bleiben sollen, wiederholt als eine Consequenz seiner Theorie aufgestellt und behauptet hat, dass dieses sein theoretisches Resultat durch die messenden Versuche bestätigt wurde. Da mich meine eigene Theorie diesen Satz als falsch erkennen liess<sup>1)</sup>, war es eben dieser Satz des Hrn. Lommel, welchen ich in meiner letzten Publication durch messende Versuche geprüft habe.<sup>2)</sup>

Es wurden<sup>3)</sup> die Radien der Ringe bei der Parallelstellung des Blättchens gemessen, sodann das Blättchen um seinen Mittelpunkt gedreht und neuerdings die Radien der Ringe gemessen. Die Radien der Ringe sollten nach Hrn. Lommel's obigem Satze nach der Drehung dieselben sein wie vor der Drehung, nach meiner Formel<sup>4)</sup> hingegen andere Werthe annehmen. Demgemäss wurden<sup>5)</sup> unter die Bezeichnung: „Gemessen“, die nach der Drehung gemessenen Radien gesetzt, unter die Bezeichnung: „Nach Lommel's Theorie“, die vor der Drehung gemessenen, und unter die Bezeichnung: „Nach Exner's Theorie“, die sich aus meiner Formel ergebenden.

Es kann demnach auch dies keinem Zweifel unterliegen, dass jener von H. Lommel aufgestellte Satz von mir ohne jede theoretische Zwischenbetrachtung in directester Weise experimentell geprüft worden ist.

Es zeigte sich nun, dass die Radien der Ringe nicht, wie es der Satz des Hrn. Lommel verlangt, ungeändert geblieben waren, vielmehr dass sie sich ungefähr auf die Hälfte ihrer ursprünglichen Grösse reducirt und jene Werthe angenommen hatten, welche sich aus meiner Formel ergeben.

1) Exner, Wied. Ann. 11. p. 229. 1880.

2) Exner, Wied. Ann. 17. p. 158. 1882.

3) Exner, l. c. p. 157.

4) Exner, Wied. Ann. 11. p. 229. 1880.

5) Exner, Wied. Ann. 17. p. 158. 1882.

Hiermit ist jedoch die historische Darstellung des Gegenstandes noch nicht erschöpft. Nachdem ich nämlich die Unrichtigkeit jenes Satzes theoretisch und experimentell nachgewiesen hatte, wurde jener Satz von Hrn. Lommel in seiner letzten Publication zurückgenommen, und zwar mit den folgenden Worten<sup>1)</sup>: „Die Ringe behalten nämlich nicht, wie ich damals gefunden hatte, beim Drehen der Staubplatte aus der parallelen in die geneigte Lage die gleichen Durchmesser, sondern sie ziehen sich zusammen, ganz in der Weise, wie Hr. Exner angibt. Die Fehlerquelle, welche jenes unrichtige Resultat verschuldete, vermag ich gegenwärtig mit Sicherheit nicht mehr zu eruiren. In diesem, ein Beobachtungsergebnis betreffenden Punkte hat also Hr. Exner recht. Nicht so in den übrigen, die Theorie betreffenden Punkten.“

Was die „übrigen, die Theorie betreffenden Punkte“ anlangt, bedarf die Mittheilung des Hrn. Lommel einer Berichtigung. Wenn nämlich jenes Beobachtungsergebnis trotz der „zahlreichen“ vorgenommenen „Beobachtungen und Messungen“ unrichtig ist, müssen nothwendig die eben so zahlreichen theoretischen Ableitungen, welche Hr. Lommel für dasselbe gegeben hat, ebenfalls unrichtig sein, und es muss angenommen werden, dass ich die Unrichtigkeit dieser Ableitungen mit Recht behauptet habe.<sup>2)</sup>

So geringfügig Hrn. Lommel's Zugeständniss der Unrichtigkeit seines Satzes zu sein scheint, so weitgehend ist es wirklich. Ich erinnere nur daran, dass die von Hrn. Lommel für den Fall gegebene Theorie, wo die beiden Flächen eines Prismas als Bestäubungs- und Spiegelfläche dienen<sup>3)</sup>, zu einem Resultate geführt hat, welches jenen von Hrn. Lommel jetzt als unrichtig erkannten Satz als speciellen Fall enthält, indem es in diesen übergeht, sobald man den Brechungsexponenten des Prismas der Einheit gleich setzt. Hr. Lommel gibt also mit der Unrichtigkeit jenes

1) Lommel, Wied. Ann. 18. p. 617. 1883.

2) Exner, Wied. Ann. 11. p. 231. 1880.

3) Lommel, Pogg. Ann. Ergbd. 8. p. 258. 1878.

Satzes zugleich stillschweigend die von mir wiederholt betonte Unrichtigkeit seiner Theorie des Versuches mit dem Prisma zu.

Ich habe Hr. Lommel's theoretische Ausführungen noch in anderer Richtung durch messende Versuche widerlegt und bin genöthigt, auch auf diese zurückzukommen.

Hr. Lommel hat auf Grund seiner Beobachtungen das folgende Resultat ausgesprochen<sup>1)</sup>: „Bedeckt man den mittleren Theil des (schief gegen die Spiegelfläche stehenden) horizontalen Spaltes, sodass an beiden Enden gleiche Stücke offen bleiben, so zeigen sich Ringe mit den nämlichen Durchmesser, als wenn der ganze Spalt oder nur sein mittlerer Theil offen gelassen wird“, und hat dieses Beobachtungsergebniss auch theoretisch abgeleitet.<sup>2)</sup> Da meine eigene Theorie auch hier zu einem ganz anderen Resultate führte<sup>3)</sup>, wiederholte ich auch diesen Versuch des Hr. Lommel messend, setzte unter die Bezeichnung: „gemessen“, jene Werthe der Ringdurchmesser, welche sich ergaben, als die beiden Enden des Bestäubungspaltes allein wirksam waren, unter die Bezeichnung: „Nach Lommel's Theorie“, die der alleinigen Wirksamkeit des mittleren Theiles der Bestäubung entsprechenden Radien der Ringe und unter die Bezeichnung: „Nach Exner's Theorie“, die meiner eigenen Formel entsprechenden Werthe.<sup>4)</sup>

Man sieht, von einer „untergeschobenen“ Theorie kann auch hier nicht die Rede sein, auch hier handelte es sich lediglich um eine experimentelle Prüfung eines von Hr. Lommel aufgestellten Satzes und um eine Wiederholung eines von Hr. Lommel angestellten Versuches. Es zeigte sich abermals, dass Hr. Lommel zu einem falschen Beobachtungsergebnisse gelangt war; und sollte Hr. Lommel's theoretische Ableitung dieses falschen Resultates richtig sein können?

Hr. Lommel<sup>5)</sup> stellt neuerdings den unrichtigen Satz auf,

1) l. c. p. 238.

2) l. c. p. 240.

3) Exner, Wied. Ann. 11. p. 222. 1880.

4) Exner, Wied. Ann. 17. p. 154 u. 155. 1882.

5) Lommel, Wied. Ann. 18. p. 620. 1883.



nach welchem der beim Durchgange durch eine gleichmässige Bestäubung in irgend einer Richtung gebeugte resultirende Strahl die nämliche Phase haben soll, wie der durch den Mittelpunkt der Bestäubungsfläche in derselben Richtung gebeugte Elementarstrahl. Der neue Beweis enthält in anderer Form denselben Fehlschluss wie der früher gegebene. Dieser Fehlschluss findet sich l. c. p. 619, wo es heisst: „Wählt man nun als Coordinatenanfang die Projection des Mittelpunktes der, z. B. rechtwinkligen, Bestäubungsfläche auf die Spiegelebene, so ist jede der Summen:

$$\alpha_1 = \sum \sin(q_1 x_v + r_1 y_v), \quad \alpha_2 = \sum \sin(q_2 x_v + r_2 y_v)$$

gleich Null, weil, wenn die Bestäubung gleichförmig ist und aus sehr zahlreichen Körperchen besteht, zu jedem Körperchen mit den Coordinaten  $x_v, y_v$  eines solchen mit den Coordinaten  $-x_v, -y_v$  vorhanden ist. Man hat daher . . . “ Hier sind  $x_v, y_v$  die Coordinaten des Mittelpunktes irgend eines der Körperchen, welche Hr. Lommel als kugelförmig voraussetzt. Jener Schluss ist ein Fehlschluss, weil die Lage der einzelnen Körperchen als unregelmässig oder zufällig vorausgesetzt ist, also keineswegs jedem Kügelchen, dessen Mittelpunkt die Coordinaten  $x_v, y_v$  besitzt, ein zweites mit den Coordinaten  $-x_v, -y_v$  entspricht. Hr. Lommel stellt eben seinen Satz für eine unregelmässige Bestäubung auf und supponirt während eines Theiles der Rechnung eine regelmässige Bestäubung. Es ist dies gerade so, als wenn Hr. Lommel das Beugungsbild eines aus einer grossen Zahl gleich breiter, paralleler, aber nicht äquidistanter, sondern unregelmässig vertheilter Stäbe berechnen wollte und während der Rechnung den Stäben kleine Verschiebungen ertheilte, durch welche sie äquidistant würden. So klein diese Verschiebungen immer sein mögen, so weiss man doch, dass hierdurch das Beugungsbild in ein vollständig anderes verwandelt wird. Andererseits lässt sich die Unrichtigkeit dieses von Hrn. Lommel aufgestellten Satzes unmittelbar vor jeder Rechnung einsehen: die Lage jedes einzelnen Körperchens ist zufällig. Es folgt, dass für eine gegebene Beugungsrichtung die Phase des diesem Körperchen entsprechenden resultirenden gebeugten Strahles zufällig ist, und hieraus,



dass auch die Phase des von der ganzen Bestäubung her-  
rührenden resultirenden Strahles zufällig ist. Ist sie aber  
zufällig, d. h. von der zufälligen Vertheilungsweise der Kör-  
perchen abhängig, so kann sie nicht identisch sein mit der  
von der Vertheilungsweise der Körperchen unabhängigen  
Phase des durch den Mittelpunkt des Umrisses der Be-  
stäubungsfläche gebeugten Strahles.

Hr. Lommel sagt: „Die Theorie des Hrn. Exner, ob-  
gleich sie von dem richtigen Grundgedanken der Beugung  
ausgeht und zu einer Endformel gelangt, welche mit der aus  
meiner Intensitätsformel durch ein Näherungsverfahren ent-  
wickelten identisch ist, ist dennoch verfehlt.....“

Ich erwidere: Ich gelangte allerdings zu derselben  
Intensitätsformel, wie Hr. Lommel in seiner letzten Publi-  
cation<sup>1)</sup>, allein ich gelangte zu dieser Formel zu einer Zeit<sup>2)</sup>,  
da Hr. Lommel noch nicht zu derselben gelangt war, viel-  
mehr das Gesetz der Ringdurchmesser, welches sich aus  
dieser Formel ergibt, noch theoretisch und experimentell zu  
widerlegen suchte.<sup>3)</sup> Diese Intensitätsformel, oder vielmehr  
die allgemeinere<sup>4)</sup>, aus welcher sie sich ergibt, repräsentirt  
die Lösung des Problems der Staubringe, und ich ergreife  
die Gelegenheit, um meine Priorität in dieser Richtung zu  
betonen, indem ich zugleich bemerke, dass die Ableitung,  
welche Hr. Lommel von dieser Intensitätsformel in seiner  
letzten Publication gibt, keineswegs correct ist, da von  
einem Satze Verdet's Gebrauch gemacht wird, dessen Un-  
richtigkeit seither von mir<sup>5)</sup> und Rayleigh<sup>6)</sup> nachgewiesen  
worden ist.

Hr. Lommel begründet seine oben citirte Behauptung,  
nach welcher meine Theorie verfehlt sein soll, mit den Wor-  
ten: „...Denn sie stützt sich auf den Satz, „die von ver-  
schiedenen Theilen der Bestäubung kommenden resultirenden

1) Lommel, Wied. Ann. 18. p. 616. 1883.

2) Exner, Wied. Ann. 11. p. 227. 1880.

3) Lommel, Wied. Ann. 8. p. 202 u. 208. 1879.

4) Exner, Wied. Ann. 17. p. 162. 1882.

5) Exner, Wien. Ber. 76. p. 522. 1877,

6) Rayleigh, Phil. Mag. (5). 10. p. 73. 1880.

Strahlen verhalten sich wie incohärente Strahlen, indem sie ihre Intensitäten summiren.““ Dieser Satz ist unrichtig....“

Ich erwidere: Dieser Satz ist nur dann unrichtig, wenn er unrichtig verstanden wird. Ich bin jedoch versichert, dass jeder, der nicht nur die citirte Hälfte, sondern den ganzen Satz<sup>1)</sup> sowie seine Ableitung gelesen hat, über den Inhalt desselben vollkommen im Klaren sein wird.

Hr. Lommel fährt fort: „Das wahre Verhalten wird vielmehr durch folgenden Satz ausgedrückt: Die von verschiedenen Theilen der Bestäubung kommenden resultirenden Strahlen verhalten sich wie cohärente Strahlen, welche mit einander interferiren, indem sie ihre Excursionen summiren. Als Resultat dieser Interferenz ergeben sich die oben beschriebenen nur von der Gruppierung der Stäubchen abhängigen Modificationen des Beugungsbildes. Da Hr. Exner die Uebereinanderlagerung elementarer Ringsysteme, die Incohärenz der durch verschiedene Stellen der Bestäubung hervorgebrachten Erscheinungen, die einfache Superposition der Ringsysteme wiederholt betont, kann wohl kein Zweifel übrig bleiben, dass er jene resultirenden Strahlen wirklich für incohärent hält.“

Ich erwidere: Da Hr. Lommel noch immer der Meinung ist, dass in meiner Theorie die von verschiedenen Stäubchen kommenden Strahlen als incohärent behandelt werden, finde ich mich zu der folgenden Erklärung veranlasst. Schon in meiner ersten Abhandlung über den Gegenstand<sup>2)</sup> habe ich diese Strahlen als cohärent behandelt, während im Gegentheile Hr. Lommel dieselben ursprünglich für incohärent hielt, ja diese vermeintliche Incohärenz theoretisch ableitete.<sup>3)</sup> Ich betone meine Priorität in dieser Beziehung. Ich habe ferner diese Strahlen nicht nur stets als cohärent angesehen, ich habe auch das Resultat ihrer Interferenz durch Summation der Excursionen berechnet<sup>4)</sup> und habe so erst theoretisch, dann experimentell das Vor-

1) Exner, Wied. Ann. 11. p. 222. 1880.

2) Exner, Wien. Ber. 71. p. 423. 1875.

3) Lommel, Pogg. Ann. 8. Ergbd. p. 102. 1878.

4) Exner, Wied. Ann. 11. p. 218. 1880.

handensein jener „oben beschriebenen nur von der Gruppierung der Stäubchen abhängigen Modificationen des Beugungsbildes“, die Granulation nämlich, entdeckt, von welcher früher weder Hr. Lommel's Theorie noch sein Experiment etwas gewusst hatten. Auch in dieser Richtung betone ich meine Priorität.

Indem man die von verschiedenen Stäubchen kommenden Strahlen als cohärent betrachtet, wie man muss, und das Resultat der Interferenz berechnet, findet man, dass in Rücksicht auf die Radien der Ringe das Resultat dasselbe ist, als wenn jene Strahlen incohärent wären. Dieser Umstand mag Hr. Lommel dahin geführt haben, fortgesetzt zu behaupten, dass ich jene Strahlen für incohärent halte.

Hr. Lommel sagt: „Hr. Exner schliesst seine Abhandlung mit einigen gegen meine Theorie gerichteten Sätzen, welche ich hier zum Schlusse wiederholen will, indem ich nur, wo Hr. Exner sagt: „„es ist unrichtig,““ schreibe: „„es ist richtig““ . . . . .“, und lässt die Aufzählung dreier Sätze folgen.

Ein Vergleich der von Hr. Lommel aufgezählten Sätze mit den von mir aufgezählten<sup>1)</sup> ergibt die folgenden Resultate. Hr. Lommel's Aufzählung enthält einen Satz zu wenig. Die Richtigkeit des von mir mit (1) bezeichneten Satzes wurde in der That von Hr. Lommel anerkannt. Der zweite Satz des Hr. Lommel ist richtig aber nicht identisch mit dem von mir als unrichtig bezeichneten analogen Satze, indem die zweite Hälfte hier weggelassen ist. Der dritte Satz des Hr. Lommel ist ebenfalls nicht identisch mit dem von mir als unrichtig bezeichneten analogen Satze. Abgesehen nämlich davon, dass Hr. Lommel infolge einer von meiner Seite erfolgten Richtigstellung in der Formel den Factor  $\frac{1}{4}$  unterdrückt hat, ist auch in der Formel des Hr. Lommel die Bedeutung von  $N_1$  und  $N_2$  seither eine andere geworden. Nur der erste der von Hr. Lommel angeführten Sätze ist demnach identisch mit dem von mir unter (2) als unrichtig bezeichneten Satze, allein ich habe

1) Exner, Wied. Ann. 11. p. 236. 1880.

Strahlen verhalten sich wie incohärente Strahlen, indem sie ihre Intensitäten summiren.““ Dieser Satz ist unrichtig....“

Ich erwidere: Dieser Satz ist nur dann unrichtig, wenn er unrichtig verstanden wird. Ich bin jedoch versichert, dass jeder, der nicht nur die citirte Hälfte, sondern den ganzen Satz<sup>1)</sup> sowie seine Ableitung gelesen hat, über den Inhalt desselben vollkommen im Klaren sein wird.

Hr. Lommel fährt fort: „Das wahre Verhalten wird vielmehr durch folgenden Satz ausgedrückt: Die von verschiedenen Theilen der Bestäubung kommenden resultirenden Strahlen verhalten sich wie cohärente Strahlen, welche mit einander interferiren, indem sie ihre Excursionen summiren. Als Resultat dieser Interferenz ergeben sich die oben beschriebenen nur von der Gruppierung der Stäubchen abhängigen Modificationen des Beugungsbildes. Da Hr. Exner die Uebereinanderlagerung elementarer Ringsysteme, die Incohärenz der durch verschiedene Stellen der Bestäubung hervorgebrachten Erscheinungen, die einfache Superposition der Ringsysteme wiederholt betont, kann wohl kein Zweifel übrig bleiben, dass er jene resultirenden Strahlen wirklich für incohärent hält.“

Ich erwidere: Da Hr. Lommel noch immer der Meinung ist, dass in meiner Theorie die von verschiedenen Stäubchen kommenden Strahlen als incohärent behandelt werden, finde ich mich zu der folgenden Erklärung veranlasst. Schon in meiner ersten Abhandlung über den Gegenstand<sup>2)</sup> habe ich diese Strahlen als cohärent behandelt, während im Gegentheile Hr. Lommel dieselben ursprünglich für incohärent hielt, ja diese vermeintliche Incohärenz theoretisch ableitete.<sup>3)</sup> Ich betone meine Priorität in dieser Beziehung. Ich habe ferner diese Strahlen nicht nur stets als cohärent angesehen, ich habe auch das Resultat ihrer Interferenz durch Summation der Excursionen berechnet<sup>4)</sup> und habe so erst theoretisch, dann experimentell das Vor-

1) Exner, Wied. Ann. 11. p. 222. 1880.

2) Exner, Wien. Ber. 71. p. 423. 1875.

3) Lommel, Pogg. Ann. 8. Ergbd. p. 102. 1878.

4) Exner, Wied. Ann. 11. p. 218. 1880.

handensein jener „oben beschriebenen nur von der Gruppierung der Stäubchen abhängigen Modificationen des Beugungsbildes“, die Granulation nämlich, entdeckt, von welcher früher weder Hrn. Lommel's Theorie noch sein Experiment etwas gewusst hatten. Auch in dieser Richtung betone ich meine Priorität.

Indem man die von verschiedenen Stäubchen kommenden Strahlen als cohärent betrachtet, wie man muss, und das Resultat der Interferenz berechnet, findet man, dass in Rücksicht auf die Radien der Ringe das Resultat dasselbe ist, als wenn jene Strahlen incohärent wären. Dieser Umstand mag Hrn. Lommel dahin geführt haben, fortgesetzt zu behaupten, dass ich jene Strahlen für incohärent halte.

Hr. Lommel sagt: „Hr. Exner schliesst seine Abhandlung mit einigen gegen meine Theorie gerichteten Sätzen, welche ich hier zum Schlusse wiederholen will, indem ich nur, wo Hr. Exner sagt: „es ist unrichtig,“ schreibe: „es ist richtig““. . . . .“, und lässt die Aufzählung dreier Sätze folgen.

Ein Vergleich der von Hrn. Lommel aufgezählten Sätze mit den von mir aufgezählten<sup>1)</sup> ergibt die folgenden Resultate. Hrn. Lommel's Aufzählung enthält einen Satz zu wenig. Die Richtigkeit des von mir mit (1) bezeichneten Satzes wurde in der That von Hrn. Lommel anerkannt. Der zweite Satz des Hrn. Lommel ist richtig aber nicht identisch mit dem von mir als unrichtig bezeichneten analogen Satze, indem die zweite Hälfte hier weggelassen ist. Der dritte Satz des Hrn. Lommel ist ebenfalls nicht identisch mit dem von mir als unrichtig bezeichneten analogen Satze. Abgesehen nämlich davon, dass Hr. Lommel infolge einer von meiner Seite erfolgten Richtigstellung in der Formel den Factor  $\frac{1}{4}$  unterdrückt hat, ist auch in der Formel des Hrn. Lommel die Bedeutung von  $N_1$  und  $N_2$  seither eine andere geworden. Nur der erste der von Hrn. Lommel angeführten Sätze ist demnach identisch mit dem von mir unter (2) als unrichtig bezeichneten Satze, allein ich habe

1) Exner, Wied. Ann. 11. p. 236. 1880.

oben gezeigt, dass auch der neue von Hrn. Lommel für diesen Satz gegebene Beweis fehlerhaft ist, indem während eines Theiles der Rechnung für die unregelmässige Bestäubung stillschweigend eine regelmässige supponirt wird.

Ich habe mich im Vorhergehenden auf die unvermeidlichen Bemerkungen beschränkt, einerseits, weil ich es nicht als meine Aufgabe ansehen kann, allen nebensächlichen Ausführungen des Hrn. Lommel prüfend zu folgen, andererseits, weil Hr. Lommel die Richtigkeit der von mir für die schiefe Lage einer rechteckigen Bestäubungsfläche aufgestellten Intensitätsgleichung anerkannt hat, also jedenfalls über das Wesentliche der Sache mit mir einerlei Meinung geworden ist.

Ich lasse eine Zusammenfassung der Resultate folgen, zu welchen mich die Berechnung der Newton'schen Staubringe geführt hat.

1. Wenn die von dem punktförmigen Spalte des Spectralapparates kommenden parallelen Strahlen, nachdem sie von einem ebenen Spiegel nahe normal reflectirt worden und zweimal, vor und nach der Reflexion, durch denselben Bestäubungsraum gegangen sind, sich in der Focalebene des Beobachtungsfernrohres vereinigen, so nimmt man in der Umgebung des Bildes der Lichtquelle ein Beugungsbild wahr.

2. Das Beugungsbild zeigt eine Granulation, d. h. der Uebergang von einem hellen Ringe zu einem folgenden dunkeln besteht nicht in einer continuirlichen Abnahme der Helligkeit, diese geht vielmehr durch zahlreiche, sehr nahe aneinander liegende unregelmässige Maxima und Minima, welche so gedrängt liegen, dass sie nur bei genau punktförmiger Lichtquelle unterschieden werden.

3. Bei der Berechnung des Beugungsbildes macht man von dem Babinet'schen Principe Gebrauch, nach welchem die Wirkung jedes Körperchens so berechnet wird, als wenn es eine Oeffnung wäre.

4. Die Granulation des Beugungsbildes rührt her von der Interferenz der Strahlen, welche von verschiedenen Oeffnungen kommen, hängt also von der unregelmässigen Vertheilung der Körperchen ab. Aendert man die, stets als

überall gleich dicht vorausgesetzte Bestäubung, bei ungeändertem Bestäubungsraum, so ändert sich die Granulation, nicht aber die Lage der Ringe. Da die Vertheilung der Körperchen als zufällig und nicht gegeben vorausgesetzt ist, kann man auch nicht die Intensität in einem gegebenen Punkte des Beugungsbildes berechnen, wohl aber die (mittlere) Intensität an einer gegebenen Stelle desselben.

5. Eine einfache Rechnung zeigt, dass diese mittlere Intensität in der Nähe jedes Punktes des Beugungsbildes gleich ist der Summe der in diesem Punkte von den einzelnen Körperchen für sich hervorgebrachten Intensitäten:

$$(1) \quad J = \Sigma(i).$$

6. Aus Gleichung (1) findet man für einen beliebigen Bestäubungsraum, welcher mit zahlreichen unregelmässig vertheilten und entweder unregelmässig gestalteten oder gleich gestalteten und orientirten Körperchen erfüllt ist:

$$(2) \quad J = \frac{2W}{R} \iiint \left( 1 + \cos \frac{4\pi x (\cos \gamma - \cos \varphi)}{\lambda} \right) dx dy dz.$$

Hier ist  $W$  die von der Bestäubung entsprechend einer nur einmaligen Beugung hervorgebrachte Intensität,  $R$  die Grösse des Bestäubungsraumes,  $\gamma$  und  $\varphi$  die Winkel der einfallenden und der gebeugten Strahlen mit der Spiegelnormale, und es erstreckt sich die Integration über den ganzen Bestäubungsraum. Sind die Körperchen unregelmässig gestaltet, so mimmt  $W$  mit wachsendem Beugungswinkel verhältnissmässig langsam ab ohne Maxima und Minima zu zeigen; die Maxima und Minima des Beugungsbildes fallen dann mit jenen des dreifachen Integrales zusammen.

7. Aus der Gl. (2) ergibt sich unmittelbar der folgende Satz: Unter der Voraussetzung unregelmässig gestalteter Körperchen, besteht das Beugungsbild, welche Gestalt immer der Bestäubungsraum habe, aus kreisförmigen Ringen, deren gemeinsamer Mittelpunkt auf die Spiegelnormale (oder ihr Bild) fällt.

8. Hat der Bestäubungsraum die Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds, dessen eine Seitenfläche mit dem Spiegel parallel ist, so ergibt sich aus (2):



$$(3) \quad J = 2W \left( 1 + \frac{\sin \frac{2a\pi(\cos \gamma - \cos \varphi)}{\lambda}}{\frac{2a\pi(\cos \gamma - \cos \varphi)}{\lambda}} \cdot \cos \frac{4e\pi(\cos \gamma - \cos \varphi)}{\lambda} \right),$$

wo  $a$  die Seite des Parallelepipedes senkrecht zum Spiegel und  $e$  die Entfernung des Mittelpunktes des Bestäubungsraumes vom Spiegel sind.

9. Degenerirt der Bestäubungsraum in eine beliebig begrenzte und gegen den Spiegel beliebig geneigte Bestäubungsebene (gleichmässig bestäubtes Glasblättchen), so erhält man aus (2):

$$(4) \quad J = \frac{2W}{f \sin \psi} \int_{x_1}^{x_2} \left( 1 + \cos \frac{4x\pi(\cos \gamma - \cos \varphi)}{\lambda} \right) F(x) \partial x,$$

wenn  $f$  die Grösse der Bestäubungsebene ist,  $\psi$  der Winkel der Bestäubungsebene mit dem Spiegel,  $x_1$ ,  $x_2$  die kleinste und die grösste Entfernung der Bestäubungsebene vom Spiegel,  $F(x)$  die Länge einer auf der Bestäubungsebene parallel dem Spiegel gezogenen Geraden, ausgedrückt als Function ihrer Entfernung vom Spiegel.

10. Ist insbesondere die Bestäubungsebene ein Rechteck, dessen eine Seite dem Spiegel parallel ist, so ergibt sich aus (4):

$$(5) \quad J = 2W \left( 1 + \frac{\sin \frac{2(x_2 - x_1)\pi(\cos \gamma - \cos \varphi)}{\lambda}}{\frac{2(x_2 - x_1)\pi(\cos \gamma - \cos \varphi)}{\lambda}} \cdot \cos \frac{4e\pi(\cos \gamma - \cos \varphi)}{\lambda} \right).$$

11. Vergleicht man die Formeln (3) und (5), so gelangt man zu dem Satze:

Ein parallelepipedischer Bestäubungsraum, dessen eine Seitenfläche mit der Spiegelebene parallel ist, bringt dasselbe Beugungsbild hervor, wie eine rechteckige Bestäubungsebene, wenn zwei Seiten dieser Bestäubungsebene auf die beiden dem Spiegel parallelen Seitenflächen des Parallelepipedes fallen.

12. Fällt insbesondere eine der beiden dem Spiegel parallelen Seiten der rechteckigen Bestäubungsebene auf die Ebene des Spiegels, so erhält man aus (5):



$$(6) \quad J = 2W \left( 1 + \frac{\sin \frac{8e\pi (\cos \gamma - \cos \varphi)}{\lambda}}{\frac{8e\pi (\cos \gamma - \cos \varphi)}{\lambda}} \right).$$

13. Ist schliesslich der Bestäubungsraum eine beliebig gestaltete Ebene parallel dem Spiegel, so erhält man aus (2):

$$(7) \quad J = 2W \left( 1 + \cos \frac{4e\pi (\cos \gamma - \cos \varphi)}{\lambda} \right).$$

14. Lässt man die Strahlen, nachdem sie nur einmal durch den Bestäubungsraum gegangen sind, unter Hinweglassung des Spiegels in das Beobachtungsfernrohr treten, so nimmt man ebenfalls ein Beugungsbild wahr, welches gegeben ist durch die Gleichung:

$$(8) \quad J = W = \Sigma(i),$$

wo  $i$  die durch ein einziges Körperchen hervorgebrachte Intensität bedeutet und sich  $\Sigma$  auf sämtliche Körperchen erstreckt. Diese Gleichung hat man bei Berechnung der oben gegebenen Formeln namentlich dann zu beachten, wenn die Körperchen gleich gestaltet und gleich orientirt sind, da dann  $W$  seine eigene Maxima und Minima hat.

15. Sind sämtliche Körperchen,  $n$  an der Zahl, gleich gestaltet und gleich orientirt, so ergibt sich aus (8):

$$(9) \quad J = ni.$$

D. h. das Beugungsbild ist identisch mit jenem, welches eine Oeffnung von der Gestalt und Lage eines der Körperchen (oder vielmehr der Projection des Körperchens auf eine zu den directen Strahlen senkrechte Ebene) hervorbringt. Sind insbesondere die Körperchen kugelförmig, so hat man das Phänomen der kleinen Höfe.

Alle diese Sätze und Formeln gestatten eine strenge numerische Prüfung durch messende Versuche, welche zum grossen Theile noch nicht durchgeführt sind. Hier ist das Feld, auf welchem Hr. Lommel meine Theorie der Staubringe, wofern sie unrichtig ist, ebenso wirksam wird widerlegen können, wie ich die seine widerlegt habe.

Wien, im Mai 1883.

**V. Ueber ein Verfahren, electriche Widerstände unabhängig von Zuleitungswiderständen zu vergleichen; von F. Kohlrausch.**

(Aus den Monatsber. d. Berl. Academie vom 29. März 1883 mitgetheilt vom Hrn. Verfasser.)

Wenn die Bedeutung der obigen Aufgabe im allgemeinen nicht näher begründet zu werden braucht, so erscheint dies um so weniger nöthig in einem Augenblicke, in welchem die Copirung von Quecksilberwiderständen von erhöhter Bedeutung ist. Diese Arbeit würde durch eine von Uebergangswiderständen ganz unabhängige Vergleichsmethode in mehrfacher Hinsicht erleichtert werden, sowohl was die Gestalt und die Dimensionen der Quecksilbersäule, als was das Material der Electroden betrifft.

Ausser den electrostatischen Methoden, welche für die feinsten Widerstandsmessungen nicht empfindlich genug sind, arbeitet meines Wissens nur das von Matthiessen und Hockin auf kurze Drähte angewandte sinnreiche Verfahren von Uebergangswiderständen ganz unabhängig. Aber auch hier dürfte die für fundamentale Aichungen geforderte Genauigkeit kaum zu erreichen sein, da zur Messung Hilfsgrössen eingeschoben werden, und da die Beobachtungen aus mehreren Theilen bestehen, welche verschiedene Manipulationen und Zeit beanspruchen.

Die von W. Thomson gegebene werthvolle Modification der Wheatstone'schen Brücke für kleine Widerstände lässt den Einfluss von Zuleitungswiderständen bekanntlich sehr klein werden. Dieselben Dienste kann, wie Hr. Kirchhoff gezeigt hat, in einfacherer Weise das Differentialgalvanometer leisten, wenn man die Multiplicatoren gegen- und hintereinander schaltet. Hr. Kirchhoff hat dabei ein Verfahren entwickelt und angewandt, welches mit einfachen Mitteln sogar ungleiche sehr kleine Widerstände miteinander scharf vergleichen lässt.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> G. Kirchhoff, Berl. Monatsber. 1880. p. 601 und Wied. Ann. 13. p. 410. 1881. Vgl. auch Dieterici, Wied. Ann. 16. p. 234. 1882. Auf die Hintereinanderschaltung hat unter anderen Gesichtspunkten zuerst Heaviside hingewiesen. Phil. Mag. (4) 45. p. 245. 1873.

Die vorliegende Mittheilung betrifft eine äusserlich geringfügige Abänderung der Hintereinanderschaltung des Doppel-multiplicators, welche man den übergreifenden Nebenschluss nennen kann, und durch welche nun die Zuleitungswiderstände vollkommen eliminirt werden. Das Verfahren arbeitet sehr rasch und genau. Man wird unten ein Beispiel finden, in welchem sehr kleine Widerstände mit einer Genauigkeit bis auf Hunderttausendtel ihres Betrages, nämlich bis auf Zehnmilliontel der Siemens'schen Einheit verglichen werden.

I. Widerstandsvergleich mittelst übereinandergreifender Abzweigungen durch das Differentialgalvanometer.

Wir schalten die zu vergleichenden Widerstände  $w$  und  $r$  zwischen  $A$  und  $B$ , resp.  $A'$  und  $B'$  in dieselbe Stromleitung ein. Abzweigungen dieses Hauptstromes werden in entgegengesetzter Richtung durch die beiden Hälften eines Differentialmultiplicators von grossem Widerstande geführt, aber so, dass die Anfangspunkte  $A$  und  $A'$  des Stromes in beiden Widerständen mit dem einen, die Endpunkte  $B$  und  $B'$  mit dem anderen Multiplicator verbunden seien, sodass also das Verbindungsstück  $BA'$  auf beiden Seiten mit gemessen wird.

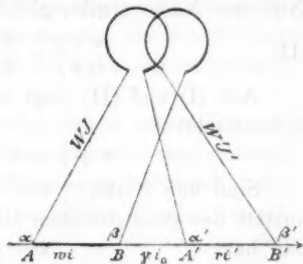


Fig. 1.

Der Widerstand dieses Mittelstückes heisse  $\gamma$ , derjenige der Multiplicatorhälften, resp.  $W$  und  $W'$ ;  $\alpha \beta \alpha' \beta'$  seien die unbekannten Uebergangswiderstände. Die Stromstärken in  $w$ ,  $\gamma$  und  $r$  mögen  $i$ ,  $i_0$  und  $i'$  heissen, diejenigen in den Multiplicatoren  $J$  und  $J'$ .

Setzen wir zunächst die beiden Multiplicatoren bezüglich ihres Widerstandes  $W = W'$  und ihrer Lage gegen die Nadel als ganz gleich voraus; dann sagt die Ruhe der Nadel bei dem Stromschluss aus:

$$J = J', \text{ also auch } i = i'; \text{ ferner:}$$

$$wi + \gamma i_0 = (W + \alpha + \alpha') J; \quad ri + \gamma i_0 = (W + \beta + \beta') J,$$

worin:  $i_0 = i - J.$

Hieraus findet sich:

$$(I) \quad \frac{w + \gamma}{r + \gamma} = \frac{W + \gamma + \alpha + \alpha'}{W + \gamma + \beta + \beta'}.$$

Nun werden die Verbindungen so vertauscht, aber ohne an den Zuleitungen zu den Multiplicatoren etwas zu ändern, dass die Punkte, welche vorher die inneren bildeten, die äusseren werden und umgekehrt, sodass jetzt auch die Uebergangswiderstände  $\alpha$  und  $\beta'$  von ihrer äusseren Lage nach innen kommen und umgekehrt. Wir nehmen an, dass

wir einen der Widerstände, z. B.  $r$ , um kleine, bestimmte Beträge abändern können (vgl. unter 4). Es sei jetzt derjenige Widerstand, welcher mit  $w$  zusammen den Ausschlag Null der Nadel ergibt, gleich  $r_1$ . Dann ist wie oben:

$$(II) \quad \frac{w + \gamma}{r_1 + \gamma} = \frac{W + \gamma + \beta + \beta'}{W + \gamma + \alpha + \alpha'}.$$

Aus (I) und (II) folgt unter Wegfall aller Uebergangswiderstände:

$$w + \gamma = \sqrt{(r + \gamma)(r_1 + \gamma)}.$$

Sind nun  $r$  und  $r_1$  nur wenig verschieden, so kann man anstatt des geometrischen Mittels das arithmetische nehmen und hat:

$$w = \frac{1}{2}(r + r_1).$$

(Der dabei begangene relative Fehler beträgt:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{r - r_1}{r + r_1} \right)^2 = \frac{1}{8} \left( \frac{r - r_1}{w} \right)^2$$

und ist, wenn  $r - r_1$  etwa  $= 0,01w$ , was ziemlich hoch gegriffen ist, praktisch zu vernachlässigen.)

Man hat also in einfachster Weise zwei Bestimmungen mit ausgewechselten Verbindungen vorzunehmen und das arithmetische Mittel gleich dem gesuchten Widerstande zu setzen.

## II. Herstellung des Differentialmultipliers.

Für lange feine Drähte einen constanten Querschnitt zu erzielen, scheint sehr schwierig zu sein, wahrscheinlich

weil die Ziehlöcher sich abnutzen. Selbst bei Draht (von Obermaier in Nürnberg), der angeblich durch Diamantlöcher gezogen war, fanden sich Differenzen des Widerstandes beider Hälften bis gegen 10 Procent.

Eine Schwierigkeit erwächst hieraus nicht, denn nach der Herstellung des Doppelmultiplicators verbindet man mit dem einen Theile constant einen ausgleichenden Widerstand in Gestalt einer bifilar gewickelten Rolle aus derselben Drahtsorte (vgl. noch unten).

Was zweitens die Gleichheit der Wirkungen desselben Stromes in beiden Hälften auf die Nadel betrifft, so ist diese genügend nahe zu erreichen, wenn man in bekannter Weise die beiden Drähte miteinander auf den Rahmen auflaufen lässt. Weil bei raschem Wickeln die Drähte gern etwas auseinander laufen, wodurch also zwei Multiplicatoren entstehen würden, welche gegen einander verschoben sind, so gebraucht man die Vorsicht, in regelmässigen Intervallen, d. h. nach je einigen hundert Umwindungen, die Drahtrollen, von denen man abwindet, in Bezug auf links und rechts auszuwechseln.

Hr. Dr. Strecker hat so ohne Mühe einen Doppelmultiplicator aus 0,15 mm dickem, doppelt besponnenem Kupferdraht von zweimal 3000 Windungen hergestellt, der keinen merklichen Contact zwischen beiden Theilen besass, und dessen eine Hälfte nur um etwa  $\frac{1}{200}$  stärker auf die auf die Nadel wirkte als die andere. Rahmen und Nadel sind angeordnet, wie ich vor kurzem beschrieben habe.<sup>1)</sup>

Nimmt man sich zu dem Aufwinden Zeit, so kann man die Gleichheit noch weiter treiben. Es ist dies aber nicht nöthig, denn man kann die Ausgleichung durch den Widerstand vornehmen. Hierin zeigt sich ein fernerer Vortheil der Anordnung des Differentialgalvanometers von grossem Widerstande als Nebenschliessung.

Denn unsere Aufgabe ist, dass der Doppelmultiplicator keinen Ausschlag gebe, wenn die Potentialdifferenz an beiden Paaren von Endpunkten gleich gross ist. Um dem In-

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 15. p. 554. 1882.

strument diese Eigenschaft zu geben, verzweigen wir also den Strom einer Säule direct durch beide Hälften in entgegengesetztem Sinne und fügen der einen Hälfte soviel Widerstand hinzu, dass der Ausschlag Null wird.

Streng genommen darf man die Angaben eines so justirten Differentialmultipliers nur dann als richtig ansehen, wenn die zu vergleichenden Widerstände gegen diejenigen der Multipliatoren verschwinden. Betragen die letzteren übrigens, wie bei uns, etwa 700 Q. E., so würden bei dem oben genannten Unterschied beider Multipliatorfunctionen um  $\frac{1}{200}$  selbst Stücke von je 10 Q. E. bis auf weniger als 0,001 Q. E. genau bestimmt werden.

Im Folgenden soll nun noch nachgewiesen werden, wie man die Fehler, welche von beliebigen aber kleinen Ungleichheiten der Multipliatoren herrühren, einfach durch den Versuch selbst eliminirt.

### III. Elimination von Ungleichheiten des Differentialgalvanometers.

Bei jeder Widerstandsvergleichung lassen sich bekanntlich Ungleichheiten der Anordnung dadurch eliminiren, dass man die zu vergleichenden Widerstände auswechselt, so wie bei einer Doppelwägung die Gewichte. Die ausgewechselten Widerstände sind gleich, wenn die Einstellung des Galvanometers ungeändert bleibt.

So einfach dieses Verfahren im Princip ist, bieten sich doch bei der Ausführung einige Uebelstände. Denn da die Umlegung des Commutators nicht ohne Zeitverlust, nicht ohne Unterbrechung oder einseitige Schlüsse geschehen kann, so handelt es sich thatsächlich nicht nur um eine plötzliche Beobachtung, ob keine Aenderung eintritt, sondern man muss zwei Einstellungen beobachten und sehen, ob dieselben gleich sind. Das langweilige Probiren, welches aus der wörtlichen Befolgung dieser Vorschrift entspringt, lässt sich allerdings durch ein Interpolationsverfahren vermeiden. Aber es bleibt ein anderer Uebelstand, nämlich der mit diesen Beobachtungen verbundene längere Stromschluss mit seinen Fehler-

quellen der Erwärmung. Um diese zu vermeiden, habe ich deswegen früher kurze Inductionsstösse constanter Wirkung im Differentialgalvanometer angewandt<sup>1)</sup>, was aber zu einer längeren Beobachtungsreihe und Rechnung führte.

Es gewährt daher grossen Vortheil, dass die Nullmethode beibehalten werden kann. Die kleinen Ungleichheiten eliminiren sich nämlich von selbst, indem wir ja bei unserem Verfahren (p. 77, 78 Fig. 1 u. 2) nicht nur die Eintritts- und Austrittspunkte des Stromes in die beiden Widerstände  $w$  und  $r$ , sondern zugleich  $w$  und  $r$  gegen die beiden Galvanometerzweige auswechseln. Einer der beiden Widerstände, etwa  $r$ , möge wie oben kleine bekannte Aenderungen gestatten. Ueber die Anordnung vgl. Nr. 4.

Bleibt dann die Nadel in Ruhe, wenn neben  $w$  das eine mal  $r$ , das andere mal  $r_1$  eingeschaltet ist, so ist wieder<sup>2)</sup>:

$$w = \frac{1}{2}(r + r_1).$$

1) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. 142. p. 418. 1871.

2) Dies ist für sehr kleine Aenderungen ohne weiteres klar; um den zulässigen Betrag der letzteren zu erkennen, wollen wir den vollständigen Ausdruck ableiten.

Die beiden Galvanometerzweige (Fig. 1 p. 76) mögen den Widerstand  $W$ , bez.  $W' = W + \delta$  haben. Die beiden Galvanometerfunctionen mögen im Verhältnisse  $1:1 + \sigma$  stehen, sodass die Ruhe der Nadel die beiden Stromstärken  $J$  und  $J(1 + \sigma)$  anzeigt.  $\alpha\beta\alpha'\beta'$  seien wieder die zu eliminirenden Uebergangswiderstände.

Dann ist also bei der ersten Verbindung:

$$(W + \alpha + \alpha')J = wi + \gamma i_0; \quad (W + \delta + \beta + \beta')J(1 + \sigma) = ri + \gamma i_0,$$

wo  $i_0 = i - J(1 + \sigma) = i - J$ .

Hieraus findet man:

$$(I) \quad \frac{w + \gamma}{r + \gamma} = \frac{W + \alpha + \alpha' + \gamma(1 + \sigma)}{(W + \delta + \beta + \beta' + \gamma)(1 + \sigma) + r\sigma}.$$

Nach dem Umschalten wird ebenso erhalten:

$$(II) \quad \frac{w + \gamma_1}{r_1 + \gamma_1} = \frac{(W + \delta + \beta + \beta')(1 + \sigma) + \gamma_1}{W + \alpha + \alpha' + \gamma_1 - r_1\sigma}.$$

Wir haben hier  $\gamma_1$  statt früher  $\gamma$  gesetzt, also angenommen, dass der Widerstand des Verbindungsstückes sich bei dem Umschalten ändere, um zu untersuchen, wie weit man hierauf Rücksicht nehmen muss.

Multiplirciren wir (I) mit (II), so erhält das Product rechts die Form:

$$\frac{W + x}{W + x_1} \frac{W + y}{W + y_1} \text{ oder } 1 + \frac{x - x_1 + y - y_1}{W},$$

insofern  $x \dots$  gegen  $W$  klein sind. So bekommen wir einfach:



## IV. Ausführung.

1. Commutator. Um die Verbindungen bequem und sicher zu wechseln, dienen sechs Quecksilbernapfe, von denen

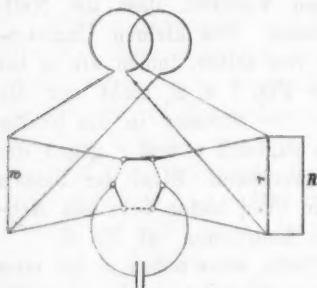


Fig. 3.

man je drei Paare überbrücken kann. Die in der Figur ausgezeichnete Ueberbrückung lässt die unteren Abzweigungspunkte der Widerstände als äussere auftreten, die punktirt macht dieselben zu inneren. Die beiden Paare von Zuleitungsdrähten zum Commutator hat man von gleichem Widerstände zu nehmen.

2. Die nothwendigen kleinen Abänderungen eines der zu vergleichenden Widerstände bildet man dadurch, dass man an den grösseren von beiden einen gewöhnlichen Stöpselrheostaten  $R$  als Nebenschliessung anlegt, so wie z. B. schon Rayleigh gethan hat<sup>1)</sup>, wobei vorausgesetzt ist, dass der Betrag von  $r$  genähert bekannt sei. Bei der Copierung von Quecksilberwiderständen werden höchstens Stücke von wenigen Einheiten gebraucht werden. Ueberhaupt wird die Methode vorwiegend auf kleine Widerstände angewandt werden. In diesem Falle reicht die gebräuchliche Form der Stöpselrheostaten bis zu 10000 unter allen Um-

$$\frac{(w + \gamma)(w + \gamma_1)}{(r + \gamma)(r_1 + \gamma_1)} = 1 + \frac{r_1 - r}{W} \sigma.$$

Das Correctionsglied, dessen Zähler das Product aus zwei sehr kleinen Grössen, und dessen Nenner gross ist, wird gegen Eins vernachlässigt, und man hat:

$$(w + \gamma)(w + \gamma_1) = (r + \gamma)(r_1 + \gamma_1).$$

Hieraus findet man unter Vernachlässigung höherer Glieder:

$$w = \frac{r + r_1}{2} \left[ 1 - \frac{(r - r_1)(\gamma - \gamma_1) + \frac{1}{2}(r - r_1)^2}{(r + r_1)^2 + (r + r_1)(\gamma + \gamma_1)} \right].$$

Setzt man z. B.  $r - r_1 = 0,01$ ,  $\gamma - \gamma_1 = 0,01$ ,  $w = 1$ , so beträgt das Correctionsglied weniger als  $\frac{1}{300000}$ .

1) Rayleigh, Phil. Trans. 1882. II, p. 679.



ständen aus; denn wenn durch Zufall eine Ungleichheit von weniger als einigen Zehntausendtheilen vorläge, so kann man durch eine kleine Temperaturänderung von einem der Vergleichsstücke nachhelfen.

3. Anwendung auf Quecksilberwiderstände. Wenn es gelingt, in die Glasröhre, ohne Beeinträchtigung ihrer Gestalt, seitlich einen Platindraht oder eine sonstige Zuleitung einzuführen, so kann einfach die mit Quecksilber gefüllte Röhre gebraucht werden, indem man ausserhalb der Platindrähte den Hauptstrom zu- und ableitet. Nimmt man die gewöhnlich gebrauchte Siemens'sche Form, nämlich die Röhre, welche beiderseitig mit den Endpunkten in Gefässe hineinragt, so müssen die Abzweigepunkte nach dem Differentialgalvanometer so weit von der Röhrenmündung abstehen, dass einige Millimeter Unsicherheit in der Stellung keinen Einfluss haben. Es hat keine Schwierigkeit, den Widerstand, welcher zwischen der Rohrmündung und der Aequipotentialfläche der Ableitung liegt, hinreichend genau zu schätzen. Haben aber die Hauptelectroden eine Oberfläche von einigen Quadratcentimetern, so kann man ohne merklichen Fehler einfach den Ausbreitungswiderstand des Stromes in das Quecksilbergefäss zu dem Widerstand der Röhre zurechnen.<sup>1)</sup> Da Uebergangswiderstände herausfallen, so kann man alle Electroden aus Platin herstellen.

4. Thermoströme. In Bezug auf Fehler durch thermoelectromotorische Kräfte ist die obige Anordnung so günstig, wie sie nur sein kann; denn in den zu vergleichenden Widerständen werden die Ströme bei der Umschaltung gewendet, in den Galvanometerzweigen aber behalten sie ihre Richtung bei.

5. Extraströme dagegen würden, wenn man mit momentanem Stromschluss arbeiten will, Schwierigkeiten bieten. Wollte man die Methode also z. B. gebrauchen, um die Spulen, welche zur absoluten Widerstandsbestimmung gedient haben, unmittelbar mit Quecksilber zu vergleichen (was übrigens kaum rathsam wäre), so gibt es kein anderes Mittel,

1) Kirchhoff l. c.; Maxwell Lehrb. d. Electr., übers. von Weinstein, l. p. 447. 1883.

als entweder mit längerem Stromschluss zu arbeiten, oder die Spulen aus zwei miteinander gewundenen Drähten bestehen zu lassen, die man dann gegeneinander einschaltet. Diese Trennung des Spulendrahtes empfiehlt sich, wie ich an einem anderen Orte bemerkt habe, allerdings auch aus sonstigen Gründen.<sup>1)</sup>

#### V. Versuche mit Quecksilber.

In der eben beschriebenen Weise wurde der Widerstand  $w$  einer Quecksilbersäule mit einem Neusilberdrahte verglichen, welcher selbst 1,4 Q. E. besass und ein wenig grösser war als der Widerstand der Quecksilbersäule. Die Ausgleichung geschah mit Hilfe eines Stöpselrheostaten, der dem Neusilberdraht als Nebenschluss beigegeben wurde.

Die Beträge dieses Rheostaten, bei denen die Galvanometernadel bei momentanem Stromschluss in Ruhe blieb, sollen mit  $R$  bezeichnet werden, dann ist:

$$r = \frac{1,4 \cdot R}{1,4 + R}.$$

Um die Uebereinstimmung zu prüfen, wurden mehrere Abwechslungen eingeführt:

1. gab ein zweiter Commutator von zweimal vier Quecksilbernäpfen mit vier überbrückenden Drähten von der Anordnung XII die Möglichkeit, die Galvanometerhälften gegenüber den Widerständen  $w$  und 1,4 auszuwechseln. Die beiden Stellungen des letzteren Commutators werden mit  $A$  und  $B$  bezeichnet, während I und II die beiden Stellungen des Umschalters der Widerstände gegen das Element (1 Smee) bedeuten. Man erhielt so:

Temperatur		Commutatoren	$R$	$\frac{1,4 \cdot R}{1,4 + R} = \frac{r + r_1}{2}$	
Quecksilber	Neusilber			$r$	$r_1$
17,18°	18,00°	A I	104,9 Q.-E.	$r = 1,38156$	1,38324
		A II	128,7 "	$r_1 = 1,38493$	
		B I	128,4 "	$r = 1,38490$	1,38327
		B II	105,4 "	$r_1 = 1,38164$	

2. Man schaltete in die eine Ableitung vom Quecksilber einen Uebergangswiderstand von etwa 2 Q.-E. ein.

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 18. p. 514. 1883.

Temperatur Quecksilber	Neusilber	Commu- tatoren	$R$	$\frac{1,4 \cdot R}{1,4 + R}$	$w = \frac{r + r_1}{2}$
17,13°	17,96°	A I	128,5 Q.-E.	$r = 1,38491$	1,38323
		A II	104,9 "	$r_1 = 1,38156$	
		B I	167,4 "	$r = 1,38839$	
		B II	88,4 "	$r_1 = 1,37818$	

Die Uebereinstimmung ist eine vollständige zu nennen.

3. Im Vorigen fanden die Abzweigungen vom Quecksilber nach dem Differentialgalvanometer mittelst Platinblechstreifen von 5 mm Breite statt, welche in die Quecksilbergefässe eintauchten. An denselben Ort (etwa mitten zwischen die 4 qcm grossen Electroden und die von diesen letzteren etwa 15 mm weit abstehenden Mündungen der Röhren in die Gefässe) wurden statt der Blechstreifen Drahtspitzen gebracht, die aus Glasröhrchen hervorragten. Die hiermit erhaltenen Resultate sind unten mit einem \* bezeichnet.

4. Es wurden auch die Stromstärken gewechselt, was ausser auf die Grösse der Ausschläge keinen merklichen Einfluss hatte.

So wurden, theilweise an verschiedenen Tagen, mehrere Versuchsreihen angestellt. \*\* bedeutet, dass der künstliche Uebergangswiderstand eingeschaltet worden war.

Um der unmittelbaren Vergleichbarkeit willen sollen die gefundenen Resultate mit dem von Hrn. Strecker bestimmten Temperaturcoefficienten 0,00064 des betreffenden Neusilberdrahtes auf gleiche Temperatur (16°) des letzteren reducirt angegeben werden.  $w_{16}$  gibt dann die Widerstände der Quecksilbersäule auch bei 16° reducirt mit dem von Rink angegebenen<sup>1)</sup> Temperaturcoefficienten 0,00094.

Temp. des Hg	$w_t$	$w_{16}$	Temp. des Hg	$w_t$	$w_{16}$
$t = 18,20^\circ$	1,3865	1,3837	** $t = 14,18^\circ$	1,3813	1,3836
18,19	1,3866	1,3837	14,19	1,3813	1,3836
17,20	1,3850	1,3834	* 14,18	1,3812	1,3835
** 17,20	1,3851	1,3835	* 14,19	1,3811	1,3835
17,18	1,3851	1,3835	* 14,06	1,3810	1,3835
** 17,13	1,3850	1,3835			

1) Rink, Beibl. 2. p. 277. 1878.

Die grössten Abweichungen vom Mittel betragen etwa  $\frac{1}{10000}$  des Ganzen und würden vielleicht noch kleiner ausfallen, wenn die Verhältnisse mit aller Sorgfalt vorbereitet werden.

#### VI. Vergleichung sehr kleiner Widerstände.

Ich habe endlich noch den Versuch gemacht, die Methode auf sehr kleine Widerstände anzuwenden. Dazu dienten drei gleiche Stücke Neusilberdraht von 0,19 m Länge, 1,4 mm Durchmesser, welche je nahe 0,01 Q. E. darstellten. Diese Drähte waren in je zwei 3,5 mm dicke Kupferdrähte von 5 cm Länge eingelöthet. Endklemmen führten den Strom in die Kupferdrähte ein; die zu vergleichenden Widerstände waren abgegrenzt durch kleine an die dicken Kupferdrähte seitlich angelöthete dünnere Drähte, von denen aus die Abzweigungen nach dem Differentialgalvanometer mit gewöhnlichen kleinen Klemmen stattfanden. Die Stücke sollen mit I II III bezeichnet werden. Sie wurden jedes mit jedem verglichen. Den Strom lieferte ein Smee'sches Element.

Die Beobachtungen wurden übrigens gerade wie früher angestellt. Die Ergebnisse von drei an verschiedenen Tagen ausgeführten Reihen, bei denen alle Verbindungen, nämlich mit dem Commutator, mit dem Galvanometer und mit dem Rheostaten, welcher als ausgleichender Nebenschluss an dem grösseren von beiden Widerständen diente, gewechselt worden sind, folgen unten. Die Stücke befanden sich neben einander in demselben Luftkasten, hatten also jedesmal gleiche Temperatur.

Das Maass für die Genauigkeit wird aus der Uebereinstimmung beider Reihen untereinander ersehen. Insofern kleine spontane Aenderungen der Drähte oder kleine Unterschiede der Temperaturcoefficienten vorhanden sein könnten, ist eine noch directere Probe für die Genauigkeit in der Annäherung der Summe der drei Unterschiede an den Werth Null gegeben. Beide Proben stellen der Methode ein vorzügliches Zeugniß aus, denn es wurden gefunden in Millionteln der Q. E.:

I—II	= + 1,20	+ 1,26	+ 1,33	$\frac{Q-E}{10^6}$
II—III	= + 10,98	+ 10,89	+ 10,86	"
III—I	= - 12,17	- 12,30	- 12,22	"
Summe	= + 0,01	- 0,15	- 0,03	$\frac{Q-E}{10^6}$

Es wurde also von einem Hundertel der Siemens'schen Quecksilbereinheit mit ziemlicher Sicherheit noch der hunderttausendste Theil bestimmt, und zwar ohne irgend eine Schwierigkeit und mit den einfachsten Hilfsmitteln. Grössere Genauigkeiten sind bei Widerstandsbestimmungen unmöglich, denn auch unter den günstigsten Verhältnissen erreichen die Unsicherheiten der Temperatureinflüsse einen solchen Betrag.

**VI. Ueber einige Bestimmungsweisen des absoluten Widerstandes einer Kette, welche einen Erdinductor und ein Galvanometer enthält;  
von F. Kohlrausch.**

(Aus den Sitzungsber. der math.-physikal. Classe der k. bayr. Acad. d. Wiss. 1883, Heft II, mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Wilhelm Weber hat zwei Verfahren der absoluten Widerstandsmessung mit seinem Erdinductor gegeben. Das eine, welches ein Galvanometer mit weiten Windungen benutzt, ist neuerdings von ihm und Zöllner ausgeführt worden.<sup>1)</sup> Von dem anderen Verfahren mit engem Galvanometer hat Weber eine Probe in seiner Abhandlung „Zur Galvanometrie“ gegeben.<sup>2)</sup> Später habe ich dasselbe im magnetischen Observatorium zu Göttingen zu einer absoluten Bestimmung der Quecksilbereinheit gebraucht.<sup>3)</sup>

Dieses letztere Verfahren ist, wie ich glaube, einiger vortheilhafter Abänderungen fähig.

1) W. Weber u. F. Zöllner, Sitzungsber. d. k. sächs. Ges. d. Wiss. 1880, p. 77.

2) W. Weber, Zur Galvanometrie; aus Abh. d. k. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. 10. 1862.

3) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. Ergbd. 6. p. 1. 1874.

1. Die ursprüngliche Form besteht darin, dass ausser dem Ausschlage, welchen ein Inductionsstoss der Galvanometernadel ertheilt, die Dämpfung der Nadel durch den Multiplicator beobachtet und mittelst der letzteren im Verein mit der Schwingungsdauer und dem Trägheitsmoment die Galvanometerfunction abgeleitet wird.

Es bedeute:

$F$  die Windungsfläche des Inductors,  
 $H$  die horizontale erdmagnetische Componente,  
 $K$  das Trägheitsmoment der Nadel,  
 $t$  ihre Schwingungsdauer,  
 $\lambda$  ihr logarithmisches Decrement,  
 $\alpha$  ihren Ausschlag durch einen Inductionsstoss, ohne die Dämpfung.<sup>1)</sup>

Dann ist, von kleineren Einflüssen abgesehen, der Widerstand der Kette gegeben durch:

$$(I) \quad w = \frac{8 F^2 H^2 \lambda t}{\pi^2 a^2 K}.$$

Die Schwierigkeiten dieses Verfahrens waren beträchtlich. Ueber die Fehlerquellen der Ausmessung einer Windungsfläche, welche letztere obendrein im Quadrate auftritt, ist seitdem von mehreren Seiten gehandelt worden. Auch die Horizontalcomponente des Erdmagnetismus tritt in der zweiten Potenz auf, und endlich ist das Trägheitsmoment eine nur schwierig genau zu bestimmende Grösse.

Ich glaube, dass die von mir ausgeführte Messung einer Windungsfläche auf galvanischem Wege<sup>2)</sup> diese Bestimmung wesentlich erleichtert. Das Trägheitsmoment wird sich nach Erfahrungen, die ich in der letzten Zeit gemacht habe, vielleicht auf einem anderen Wege, nämlich mittelst bifilarer

1) Wie  $\alpha$  bestimmt wird, ob durch einen einzelnen Stoss, ob durch Multiplication oder durch Zurückwerfung, welche letztere bei der Weber'schen Methode angewandt wurde, braucht hier nicht gesagt zu werden.

2) F. Kohlrausch, Gött. Nachr. 1882. p. 654; Wied. Ann. 18. p. 513. 1883. Neuerdings habe ich zur Tangentenbusssole eine Glasscheibe mit aufgezogenem Kupferdrahte benutzt. Ein solcher Kreis lässt sich in sehr grossen Dimensionen ausführen. Die Nadel ist auf einem leichten Spiegel befestigt, der selbst als Töpler'scher Luftdämpfer wirkt.

Aufhängung bequemer auswerthen lassen als durch das Gauss'sche Belastungsverfahren. Jedenfalls lässt das letztere sich auf diesem Wege controliren. Es wird endlich Sache des Versuchs sein, festzustellen, ob die verschiedenen jetzt vorliegenden Methoden der Messung des Erdmagnetismus zu hinreichend übereinstimmenden Ergebnissen führen.

2. Es ist möglich, das Trägheitsmoment zu eliminiren, indem man statt dessen eine andere Grösse bestimmt, nämlich das Product  $MH$ , wo:

$M$  den Nadelmagnetismus bedeutet.

Zu diesem Zwecke bringt man den Stab in eine ostwestlich orientirte bifilare Aufhängung und misst die Ablenkungen, wie ich beschrieben habe.<sup>1)</sup>

Insofern nun:  $K = \frac{t^2}{\pi^2} \cdot (MH)$ , so wird:

$$(II) \quad w = 8 \frac{F^2 H^2 \lambda}{a^2} \frac{1}{t (MH)}.$$

Die Beziehung kann zur Controle der ersten Methode, namentlich betreffs des Trägheitsmoments dienen.

3. Eine gründlichere Umgestaltung des Ausdruckes (I), durch welche nicht nur das Trägheitsmoment herausfällt, sondern auch der Erdmagnetismus aus der zweiten in die erste Potenz versetzt wird und nun obendrein nur im Verhältniss zum Nadelmagnetismus vorkommt, folgt aus (II) ohne weiteres, wenn man Nenner und Zähler durch  $H$  theilt. Dann wird:

$$(III) \quad w = 8 \frac{F^2 H \lambda}{a^2 M t}.$$

Das Verhältniss  $H/M$  ist bekanntlich durch Ablenkungen verhältnissmässig leicht zu bestimmen.

Allerdings muss der erdmagnetische Inductionscoefficient des Stabes bekannt sein.

Ein astatisches Nadelpaar zu gebrauchen, wie bis jetzt bei der Methode (I) geschah, wird hier kaum möglich sein. Man wird wohl ein Galvanometer von sehr grossen Dimensionen mit einfacher Nadel anwenden.

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 17. p. 765. 1882.



4. Eine fernere wesentliche Abänderung des Verfahrens lässt sich einführen, wenn man die Galvanometerfunction anstatt aus der Dämpfung durch Vergleichung mit einem Galvanometer von bekannter Function ermittelt, ähnlich wie bereits von Dorn geschehen ist.<sup>1)</sup>

Freilich wird hier nicht die dynamische Galvanometerfunction  $C$ , sondern die statische  $c$  bestimmt. Es ist:

$$C = M \cdot c = \frac{\pi^2 K}{\ell^2 H} c.$$

Nun ergibt sich aus dem Neumann'schen Grundgesetz der Magnetinduction und aus der Bewegungsgleichung einer gedämpften Nadel nach Weber<sup>2)</sup>, wenn man wie oben von Correctionsgliedern absieht:

$$\lambda = \frac{1}{2w} \frac{\ell}{K} \cdot C^2 = \frac{\pi^4}{2} \frac{1}{w} \frac{K}{\ell^2} \frac{c^2}{H^2}.$$

Dies in (I) eingesetzt, liefert:

$$(IV) \quad w = 2\pi \frac{F}{a} \frac{c}{\ell}.$$

Der Ausdruck enthält alle Grössen nur in erster Potenz und ist vom Trägheitsmoment und vom Erdmagnetismus unabhängig. In der Ausführung tritt allerdings noch das Verhältniss der erdmagnetischen Intensitäten an dem Orte des Inductors und des Galvanoskopes herein. Dieses Verhältniss lässt sich auf dem von mir der k. bayerischen Academie im Januar d. J. vorgelegten Wege genau ermitteln.<sup>3)</sup>

5. Endlich erhält man aus dem obigen Ausdruck für  $\lambda$  noch:

$$(V) \quad w = \frac{\pi^2 c^2}{2} \frac{M}{\lambda \ell H}$$

unabhängig von dem Erdinductor.

Durch die verschiedenen hier vorgeschlagenen Bestimmungsweisen ist also die Möglichkeit gegeben, die sämtlichen einzelnen beobachteten Grössen durch andere zu ersetzen, ohne an der angewandten Kette eine Aenderung eintreten zu lassen. Diese Möglichkeit ist von grosser Be-

1) E. Dorn, Wied. Ann. 17. p. 775. 1882.

2) W. Weber, Zur Galvanometrie, p. 21, wo  $F = C/K$  zu setzen ist.

3) Vgl. auch Wied. Ann. 19. p. 130. 1883.

deutung bei einer Messung, welcher man, wie die Erfahrung gezeigt hat, sich im höchsten Grade kritisch gegenüberstellen muss.

Schliesslich bemerke ich noch, dass die beiden unter 4 und 5 erwähnten Methoden in der Hauptsache bereits von Weber angegeben sind, mit dem Unterschiede allerdings, dass die Galvanometerfunction bei ihm aus den Dimensionen des Multiplicators berechnet wird, während wir dieselbe empirisch bestimmen wollen.

---

VII. *Ueber die durch die Polarisation bewirkte Phasenänderung von Wechselströmen;*  
*von A. Winkelmann.*

---

Hr. F. Kohlrausch hat gezeigt<sup>1)</sup>, dass der Verlauf von Wechselströmen durch die Einschaltung einer polarisirenden Flüssigkeitsschicht eine zweifache Aenderung erfährt. Es wird einerseits eine Verschiebung der Schwingungsphase und andererseits eine Veränderung der Stromstärke hervorgerufen. Die letztere Aenderung ist von Hrn. Kohlrausch benutzt, um die Grösse der Polarisation zu messen, während Hr. Oberbeck die Phasenverschiebung näher studirt und zu dem gleichen Zweck zu verwerthen die Absicht hat.<sup>2)</sup> Beide Beobachter verwendeten den Sinusinductor zur Erzeugung der Wechselströme und beobachteten die Wirkung derselben mittelst des Electrodynamometers. Da die Intensitätsvertheilung der so erzeugten Ströme dem einfachen Sinusgesetze folgt, so sind dieselben sehr gut geeignet, um die hervortretende Phasendifferenz näher zu untersuchen. Es war aber zu erwarten, dass auch die in der gewöhnlichen Weise erzeugten Inductionsströme eine Verschiebung ihrer Intensitätscurve erleiden würden, und dass letzteres durch ein geeignetes Mittel sichtbar gemacht werden konnte. Ich habe diese Erwartung durch einen electromagnetischen Stimm-

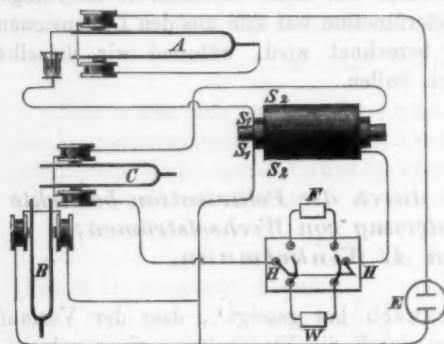
1) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. 148. p. 183. 1873. Jubelb. p. 290. 1874.

2) Oberbeck, Wied. Ann. 19. p. 213. 1883.

gabelapparat geprüft und bestätigt gefunden. Die Einrichtung der Versuche war folgende:

Von drei möglichst gleich gestimmten Gabeln *A*, *B*, *C* (s. Fig.) diente *A* als Unterbrechungsgabel, *B* mit senkrecht gestellten Zinken trug das Objectiv des Beobachtungsmikroskops;

ein durch eine Lampe beleuchtetes Quecksilberkügelchen auf der Gabel *C*, deren Zinken horizontal standen, wurde durch das Mikroskop beobachtet. Der Strom der Batterie *E* durchlief die Windungen der Electromagnete und die Unterbre-



chungsvorrichtung der Gabel *A*, dann die primäre Spirale  $S_1$  eines Inductionsapparates (ohne Condensator) und endlich in einer Zweigleitung die Windungen für die Gabel *B*. Die Windungen der secundären Spirale  $S_2$  waren einerseits mit den Windungen der Gabel *C*, deren Zinken magnetisirt waren<sup>1)</sup>, und andererseits mit einer Wippe *HH* verbunden; das zweite Ende der Windungen der Gabel *C* stand ebenfalls mit der Wippe in Verbindung. Durch die Wippe konnte abwechselnd die zu untersuchende Flüssigkeit *F* oder ein anderer Widerstand *W* in den Lauf des Inductionsstromes eingeschaltet werden.

Bald nach der Erregung des Apparates bildet sich bei der Beobachtung durch das Mikroskop eine feststehende leuchtende Curve aus, deren Gestalt von mancherlei Umständen abhängt. Zunächst ist die Schwingungsdauer der freischwingenden Gabeln von Einfluss, ferner die Stromstärke der Batterie und endlich die Grösse des Widerstandes, welcher

1) Vgl. v. Ettingshausen, Pogg. Ann. 159. p. 51. 1876.

in den Inductionsstrom eingeschaltet wird. Wenn man einen der genannten Factoren ändert, so tritt nicht nur eine Aenderung der Amplitude, sondern auch eine solche der Phase der beiden Gabeln ein, welche sich durch eine Verschiebung der leuchtenden Curve zu erkennen gibt. Es lässt sich dies durch den Einfluss des Magnetismus, welcher nicht gleichzeitig mit dem Strommaximum seine grösste Intensität erlangt, sowie durch die Induction der bewegten Gabelzinken und jene der Spiralen auf sich selbst und aufeinander erklären. Diese Veränderungen der Phase sind für die Beobachtungen des Einflusses der Polarisation zwar störend, lassen aber doch denselben unter gewissen Umständen deutlich erkennen. Die folgende Einrichtung zeigte sich zweckmässig.

Als Widerstand  $W$  wurde ein mit gesättigter Kupfer-  
vitriollösung gefüllter Glaskasten benutzt; in die Lösung tauchten Kupferelectroden. Man erhält auf diese Weise einen Widerstand, der continuirlich verändert werden kann und nur sehr schwach polarisirt wird. Als polarisirende Flüssigkeit  $F$  wurde entweder verdünnte Schwefelsäure oder gesättigte Kochsalzlösung mit blanken Platinelectroden verwandt, deren Grösse zwischen 45 und 20 qmm variirte. Nach der Erregung des Apparates richtet man die Zweigleitung zur Gabel  $B$  so ein, dass die Amplituden beider Gabeln ungefähr gleich sind, und bewirkt dann durch Aufkleben von kleinen Wachskugeln auf eine der Gabeln  $B$  oder  $C$ , dass die beobachtete Ellipse in eine gerade Linie, die nahezu  $45^\circ$  gegen die Horizontale geneigt ist, übergeht. Um die Stellung derselben zu markiren, war in dem Mikroskop ein Ocularmikrometer angebracht, dessen Linien durch Drehung des Oculars der leuchtenden Linie parallel gestellt wurden. Verändert man jetzt den Widerstand  $W$ , indem man die Kupferelectroden voneinander entfernt, so tritt eine langsam fortschreitende Aenderung der geraden Linie ein, indem dieselbe in eine Ellipse übergeht, deren kleine Axe wächst, während die grosse abnimmt und gleichzeitig sich so dreht, dass sie sich der Horizontalen nähert. Legt man dann die Wippe um und lässt also den Inductionsstrom durch die polarisirende Flüssigkeit gehen, so verändert sich die Curve, und man kann

nicht von vornherein beurtheilen, ob diese Aenderung bloss von einer Widerstandsänderung herrührt oder nicht. Es lässt sich aber leicht ein solcher Widerstand  $W$  finden, dass bei dem Umlegen der Wippe die Curve eine charakteristische Aenderung erfährt. Während nämlich bei Anwendung der Kupferlösung die grosse Axe der Ellipse, wenn sie durch eine Widerstandsänderung kleiner wird, sich der Horizontalen zudreht, kann man den Widerstand der Kupferlösung so reguliren, dass beim Umlegen der Wippe die grosse Axe sich aufrichtet und zugleich kleiner wird. Dass dies nur von einer Phasendifferenz herrühren kann, welche der primäre und secundäre Strom gegeneinander erfahren, und welche nicht durch eine Widerstandsänderung hervorgebracht ist, folgt aus dem Vorstehenden unmittelbar. Bei dem von mir eingerichteten Apparate betrug die Verschiebung des Endes des grossen Axe etwa  $\frac{1}{20}$  dieser selbst und liess sich ganz deutlich wahrnehmen. Eine genauere Ausmessung würde keinen Werth haben, und bemerke ich nur noch, dass die benutzten Gabeln 210 Schwingungen in der Secunde machten.

Hohenheim, Juni 1883.

---

VIII. *Quantitative Bestimmung des Einflusses der durch Dehnung erzeugten Temperaturveränderung auf die Messung der ersteren;*  
*von Dr. A. Miller in München.*

---

Früher<sup>1)</sup> habe ich Formeln aufzustellen versucht, die es ermöglichen, für jede Dehnung und unmittelbar darauf folgende Verkürzung eines Drahtes den Einfluss zu bestimmen, welchen die durch Dehnung, resp. Zusammenziehung im Drahte erzeugte Temperaturveränderung auf diese Vorgänge hat, selbst wenn letztere beliebig oft hintereinander statt-

---

1) Miller, Sitzungsber. der kgl. Acad. der Wiss. München 1883. Heft. 1.

finden. Die vorliegende Arbeit soll diesen Einfluss zahlenmässig für das Eisen festsetzen. Hierzu mussten nach der erwähnten Formel zwei Constanten experimentell bestimmt werden, nämlich das  $k$ , welches das Verhältniss der Temperaturänderung  $\Delta t$  zur Dilatation  $\lambda_0$  angibt, und das  $h$ , die Constante in dem Newton'schen Abkühlungsgesetz. Da die Formel  $k\lambda_0 = \Delta t$  enthält, so wurde direct  $k\lambda_0$ , resp.  $\Delta t$  aus der bekannten von W. Thomson abgeleiteten und von Edlund modificirten Formel bestimmt, welche die Beziehung zwischen Druck- und Temperaturänderung vermittelt. Der Werth von  $\Delta t$  ist für  $5^\circ$  und  $100^\circ$  C. berechnet.

Die Constante  $h$  konnte nicht direct bestimmt werden. Es wurde deshalb für dieselben Eisendrahtsorten eine Abkühlungsconstante  $h_1$  auf die übliche Weise ermittelt, indem der sich abkühlende Eisendraht um das Gefäss eines empfindlichen Thermometers gewunden war. Aus  $h_1$  konnte das Emissionsvermögen des Drahtes und daraus  $h$  selbst berechnet werden.

Bei der Anwendung der so gefundenen Constanten  $k$  und  $h$  wurde beachtet, dass der thermische Ausdehnungscoefficient im belasteten und unbelasteten Zustande verschieden ist. Die Rechnung ergibt, dass die erste Decimale des in Scalentheilen angegebenen Correctionswerthes innerhalb weiter Grenzen weder von der Wiederholungszahl der Dehnungen, noch von der hierzu verwendeten Zeit beeinflusst wird. Auch kann für das An- und Abspannen ein mittlerer Correctionswerth genommen werden, der für den untersuchten Eisendraht von  $0^\circ$  bis  $100^\circ$  C. zwischen 0,15 und 0,24 Scalentheilen liegt.

§ 1. Ich habe früher<sup>1)</sup> den Elasticitätsmodul mit Ausschluss der elastischen Nachwirkung zu bestimmen versucht. Die dabei am Eisen gefundenen vorläufigen Resultate weisen auf, meines Wissens bisher nicht bekannte, Eigenthümlichkeiten der „elastischen Dehnung“, wie ich die Dehnung mit Ausschluss der elastischen Nachwirkung, also die von der

1) Miller, Sitzungsber. d. kgl. bayr. Acad. d. Wiss. 1882. Hft. 4.

Bemerkung. Der Beisatz (1882, Hft. 4) im Text soll vorstehendes Citat in Zukunft ersetzen.

Zeit unabhängige Dehnung nannte, hin, deren weitere Untersuchung von Interesse ist.

Der erheblich verschiedene Einfluss, den die Wärme auf die elastische Dehnung und die elastische Nachwirkung ausübt, macht es nöthig, dass beide getrennt werden müssen, wenn man das elastische Verhalten der Materie erforschen und mit anderen physikalischen Erscheinungen der Substanz in Beziehung bringen will. Ich beabsichtige, dies zu thun. Vorher sind aber die Grundlagen der Methode noch etwas genauer zu untersuchen.

Die Resultate der früheren Arbeit (1882, Heft 4) wurden deshalb als erste Annäherung von mir bezeichnet, weil es nicht fest stand, welche Grösse die während der Dehnung auftretende, weiterhin vernachlässigte elastische Nachwirkung besitzt, die einen wenn auch verhältnissmässig kleinen, indess doch zu bestimmenden Theil der gemessenen Deformation des Körpers ausmacht. Es musste aber die Behandlung einer anderen Frage vorausgehen. Dies habe ich in der Arbeit: „Ueber den Einfluss der durch Dilatation erzeugten Temperaturänderung auf die Messung der ersteren“<sup>(1)</sup> vorläufig rechnerisch gethan.

In der gegenwärtigen Abhandlung habe ich zunächst die quantitative Bestimmung des ebenbezeichneten Wärmeinflusses auf die Messung vorgenommen. Ferner wird es sich darum handeln, welche physikalische Bedeutung die jeder Belastung und Entlastung des Drahtes entsprechende Längenänderung beizulegen ist, indem diese Aenderung zweifellos das Resultat zweier Kräfte, der Elasticität und der Nachwirkung ist. Das „Princip der Superposition“<sup>(2)</sup> wird bei dem von mir eingeschlagenen Versuchsverfahren vermuthlich eine wichtige Rolle spielen, und weiter wird noch in Betracht zu ziehen sein, wie sich die Annahme Weber's, dass die Nachwirkung eine Folge der allmählichen Drehung der Elasticitätsachsen der Molecüle sei, zu den hier auftretenden Erscheinungen verhält.

1) Miller, Sitzungsber. d. kgl. bayr. Acad. d. Wiss. 1883. Hft. 1. Bemerkung. Hier gilt dasselbe wie bei vorigem Citat.

2) Kohlrausch, Pogg. Ann. 160. p. 225. 1877.



Die in der zuletzt erwähnten Abhandlung (1883, Heft 1) angestellte Untersuchung führte unter der Voraussetzung, dass die Geschwindigkeit beim An- und Abspannen die gleiche und unveränderlich ist, zu den Ausdrücken für die  $v$ . Verlängerung:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda &= (b_v - a_v) - v'l'' \\ &+ \gamma \cdot L \cdot \alpha'_t \cdot k \lambda_0 \cdot \frac{1}{h z_0} \cdot \frac{e^{h z_0} - 1}{e^{h z_0} + 1} \cdot \left[ 2 - \frac{1}{e^{2 v h z_0}} (e^{h z_0} - 1) e^{h z_0} \right], \end{aligned} \right.$$

für die  $v$ . Verkürzung:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda &= (b_v - c_v) + v'l'' \\ &+ \gamma \cdot L \cdot \alpha''_t \cdot k \lambda_0 \cdot \frac{1}{h z_0} \cdot \frac{e^{h z_0} - 1}{e^{h z_0} + 1} \cdot \left[ 2 + \frac{1}{e^{2 v h z_0}} (e^{h z_0} - 1) \right]. \end{aligned} \right.$$

Aus diesen beiden Gl. erhält man durch Subtraction:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} v'l' + v'l'' &= (c_v - a_v) \\ &- \gamma \cdot L \cdot k \lambda_0 \cdot \frac{1}{h z_0} \cdot \frac{e^{h z_0} - 1}{e^{h z_0} + 1} \cdot \left[ \frac{e^{h z_0} - 1}{e^{2 v h z_0}} (\alpha'_t e^{h z_0} + \alpha''_t) - 2(\alpha'_t - \alpha''_t) \right]. \end{aligned} \right.$$

Darf man  $\alpha'_t = \alpha''_t = \alpha_t$  nehmen, so ist:

$$(4) \quad v'l' + v'l'' = (c_v - a_v) - \gamma \cdot L \cdot \alpha_t \cdot k \lambda_0 \cdot \frac{1}{h z_0} (e^{h z_0} - 1)^2 \cdot \frac{1}{e^{2 v h z_0}}.$$

Die Bedeutung der Grössenzeichen ist folgende (Längen in Scalentheilen — Zeiten in Sekunden):

1)  $\lambda$  bedeutet die Grösse der Dehnung, welche unabhängig von der Zeit ( $z_0$ ) entsteht und somit unter gleichen Umständen als constant betrachtet wird „die elastische Dehnung (e. D.)“.

2)  $v'l'$  und  $v'l''$  die von der Zeit ( $z_0$ ) abhängigen Dehnungen (positiv oder negativ) während der Verlängerung ( $\lambda_0$ ), resp. Verkürzung ( $\lambda_0$ ) des Drahtes; nach W. Weber elastische Nachwirkung (e. N.) genannt.

3)  $a_v$ ,  $b_v$ ,  $c_v$  sind die bei der  $v$ . successiven Belastung und der unmittelbar darauffolgenden  $v$ . successiven Entlastung des Drahtes behufs Messung der Verlängerung ( $\lambda_0$ ) und Verkürzung ( $\lambda_0$ ) abgelesenen Scalentheile; ist  $\Delta p$  diese Zugkraft,

so wird  $b_0$  abgelesen, vor der Belastung  $a_0$  und, nachdem die Zugkraft successive bis 0 abgenommen,  $c_0$ .

4)  $L$  ist die Länge des untersuchten Drahtes von einer Klemme bis zur anderen und

5)  $\alpha'_t$  und  $\alpha''_t$  dessen thermische lineare Coëfficienten, abhängig von der Temperatur ( $t$ ) und Spannung.

6)  $\lambda_0$  die Längenzunahme bei der Belastung  $\Delta p$ .

7)  $z_0$  die Zeit, in welcher die Verlängerung oder Verkürzung  $\lambda_0$  entsteht.

8) und 9)  $h$  und  $k$  haben die frühere Bedeutung.

10) Endlich ist  $\gamma$  eine von der Einrichtung der Ablesungsvorrichtung abhängige Constante, die den Werth des dritten Gliedes in Scalentheilen ausdrückt.

Behufs Anwendung obiger Formeln auf Versuche sind vorerst die Constanten  $k$ ,  $h$  und  $\gamma$  zu bestimmen, was nachstehend für Eisen geschehen soll.

§ 2. Da  $k\lambda_0 = \Delta t$  ist, so lässt sich aus der Formel von Edlund<sup>1)</sup>:

$$(5) \quad \Delta t = \frac{A(b+t)\alpha}{wc} \cdot \Delta p,$$

der Werth von  $k\lambda_0$  berechnen. Hierin bedeutet  $A$  das mechanische, durch Edlund abgeänderte Wärmeäquivalent (es ist 1,5767 mal kleiner als das gewöhnliche),  $b+t$  die absolute Temperatur,  $\alpha$  den thermischen linearen Coëfficienten,  $c$  die spezifische Wärme bei constantem Drucke und  $w$  das Gewicht der Längeneinheit (1 m) des Drahtes.  $\Delta p$  ist das angewendete Streckgewicht und  $\Delta t$  die Temperaturänderung. Die Grösse  $b+t$  ist wegen der Kleinheit von  $\Delta t$  als constant betrachtet. — Hieraus folgt:

$$(6) \quad \Delta t = \frac{1}{1,5767} \cdot \frac{A_1(b+t)\alpha}{wc} \cdot \Delta p = k\lambda_0.$$

Um  $k$  selbst zu bestimmen, ist zu berücksichtigen, dass:

$$E = \frac{L}{\lambda_0} \cdot \frac{\Delta p}{q}, \text{ also: } \Delta p = \frac{Eq}{L} \cdot \lambda_0,$$

worin  $E$  der Elasticitätsmodul,  $L$  die Länge,  $q$  der Querschnitt und  $\lambda_0$  die dem Streckgewichte  $\Delta p$  entsprechende Verlängerung des Drahtes ist. Danach wird:

1) Edlund, Pogg. Ann. 126. p. 539. 1865.

$$(7) \quad \Delta t = \frac{1}{1,5767} \cdot \frac{A_1 (b+t) \alpha}{wc} \cdot \frac{Eg}{L} \cdot \lambda_0, \quad \text{und:}$$

$$(8) \quad k = \frac{1}{1,5767} \cdot \frac{A_1 (b+t) \alpha}{wc} \cdot \frac{Eg}{L}.$$

Ich wandte zunächst die Formeln (1), (2) und (3) auf die Versuche an Eisen an, welche in der bereits erwähnten Abhandlung (1882, Heft 4) von mir beschrieben worden sind.

In Gl. (6) setze ich das gefundene  $\alpha = 0,000\,010\,88$ , (1882, Heft 4, § 14), ferner mit Edlund  $c = 0,1138$ . Das stets am Hebelarm  $p = 567$  mm angebrachte Streckgewicht betrug  $P = 1,1992$  kg, während der Befestigungspunkt des Drahtes von der Unterstützungsschneide des Hebels (1882, Heft 4, Fig. 2)  $r_2 = 70,8$  mm entfernt war. Hiernach ist die Belastung:

$$\Delta p = \frac{P \cdot p}{r_2} = \frac{1,1992 \cdot 567}{70,8} = 9,6038 \text{ kg.}$$

Das Gewicht  $w$  war  $= 0,002\,282$  kg.

Um die Gl. (6) für Eisen bei verschiedenen Temperaturen und wechselnder Belastung leicht benutzen zu können, schreibe ich sie in der Form:

$$(9) \quad \Delta t = \left( \frac{1}{1,5767} \cdot \frac{A_1 b \alpha}{wc} \right) \Delta p + \left( \frac{1}{1,5767} \cdot \frac{A_1 \alpha}{wc} \right) t \cdot \Delta p.$$

Setzen wir:

$$\frac{1}{1,5767} \cdot \frac{A_1 b \alpha}{wc} = M, \quad \frac{1}{1,5767} \cdot \frac{A_1 \alpha}{wc} = N, \quad \text{so ist:}$$

$$(10) \quad \Delta t = (M + N \cdot t) \cdot \Delta p.$$

Für unseren Eisendraht ist:

$$M = 0,01675, \quad N = 0,000\,061\,36,$$

somit für  $t = 5^\circ \text{ C.}$  und  $\Delta p = 9,6038$  kg:

$$(11) \quad \Delta t = (0,01675 + 0,000\,061\,36 \cdot t) \Delta p,$$

$$\Delta t = 0,01706. \Delta p = 0,1638^\circ \text{ C.} = k \lambda_0 = 0,164^\circ \text{ C.}$$

Für  $t = 100^\circ \text{ C.}$  und  $\Delta p = 9,6038$  kg ist:

$$\Delta t = 0,02289. \Delta p = 0,2198^\circ \text{ C.} = k \lambda_0 = 0,220^\circ \text{ C.}$$

§ 3. Wie im § 1 bemerkt wurde, ist  $h$  eine Constante der Differentialgleichung:

$$(12) \quad d\tau = -h\tau dz,$$

worin  $\tau$  die Temperaturdifferenz zwischen einem sich abkühlenden Körper und seiner Umgebung,  $z$  die Zeit der Abkühlung bedeutet. Bestimmt man in:

$$(13) \quad \int \frac{d\tau}{\tau} = -h \int dz + C$$

die Integrationsconstante, so dass für  $z=0$  der Werth  $\tau = \tau_0$  ist, so ergibt sich:

$$(14) \quad \tau = \tau_0 e^{-hz}.$$

Sind nun  $\tau_1$  und  $z_1$ , sowie  $\tau_2$  und  $z_2$  beobachtete, zusammengehörige Werthe, so erhält man aus Gl. (14):

$$(15) \quad h = \frac{\log \tau_1 - \log \tau_2}{(z_2 - z_1) \log e},$$

wobei man zugleich vom Anfangstemperaturüberschusse  $\tau_0$  unabhängig wird.

Das Richtigste wäre nun,  $h$  unter den Umständen zu bestimmen, unter denen sich der Draht bei den Dehnungsversuchen abkühlt, ihn somit in die Dehnungsvorrichtung einzuspannen, und die Temperaturveränderungen aus den Spiegelablesungen nach vorhergegangener Ermittlung des thermischen Ausdehnungscoefficienten mit Berücksichtigung des Temperatureinflusses auf denselben zu berechnen. Dies ist deshalb nicht thunlich, weil die gleichmässige Erwärmung des Drahtes dann kaum ausführbar ist, wenn andere Missstände vermieden werden sollen. Die Erwärmung des Drahtes durch den galvanischen Strom würde die Berechnung der Temperatur aus den Spiegelablesungen unzuverlässig machen, weil der galvanische Strom nach Edlund<sup>1)</sup> unabhängig von der Wärmeentwicklung den Draht dehnen soll. Ich habe die Constante  $h$  aus dem Emissionsvermögen des Drahtes berechnet, nachdem dieses durch besondere Versuche an ihm bestimmt worden war.

Ist  $\epsilon$  das totale Emissionsvermögen des Drahtes,  $\sigma$  dessen Oberfläche,  $\tau$  wie in Gl. (14) die Temperaturdifferenz zwischen Draht und Umgebung, sowie  $z$  die Abkühlungszeit, so geht in der Zeit  $dz$  die Wärmemenge:

$$(16) \quad dQ = \epsilon \cdot \sigma \cdot \tau \cdot dz$$

1) Edlund, Pogg. Ann. 129. p. 15. 1866.

verloren. Andererseits ist aber auch:

$$(17) \quad dQ = -p_0 \cdot c \cdot d\tau,$$

wenn  $p_0$  das absolute Gewicht des Drahtes und  $c$  dessen spec. Wärme ist. Daraus ergibt sich:

$$-\frac{d\tau}{dz} = \frac{\varepsilon \cdot \sigma}{p_0 c} \tau = h \tau$$

$$(18) \quad \text{und somit: } h = \frac{\varepsilon \cdot \sigma}{p_0 c}.$$

Da  $p_0$ ,  $c$  und  $\sigma$  genau angegeben werden können, und  $h$  unter den obwaltenden Umständen zunächst nur als von  $\varepsilon$  abhängig angesehen werden kann, indem Luftberührung und Gestalt des Körpers bei diesen niederen Temperaturdifferenzen ohne erheblichen Einfluss auf den Verlauf der Abkühlung sind, so war  $\varepsilon$  durch Versuche zu bestimmen.

Dann wurde ein Stück des bei den Dehnungsversuchen gebrauchten Drahtes vom Gewichte  $p_1$  zu einer Rolle mit ganz genau anschliessenden Windungen, deren Zahl  $m$ , aufgewunden, jedoch so, dass in sie gerade das kleine cylindrische Gefäss eines sehr empfindlichen Quecksilberthermometers hineingesteckt werden konnte und von der Rolle genau bedeckt wurde. Das untere Ende wurde mit einem Korkplättchen verdeckt. Um nicht den Gang des Thermometers dadurch unrichtig zu machen, dass etwa die Drahtrolle infolge ungleich starker Zusammenziehung von Eisen und Glas einen Druck auf die Wand des Quecksilbergefässes ausübt, war zwischen beiden ein Spielraum von etwa 0,1 bis 0,2 mm gelassen. Die spec. Wärme  $c_2$  der Quecksilbermenge  $p_2$  des Thermometergefässes, sowie die dünne Glaswand des letzteren gestatten, anzunehmen, dass die Temperaturvertheilung in Draht, Quecksilber und Glas eine ziemlich gleichmässige sei. Das Gewicht des Glases sei  $p_3$  und die spec. Wärme desselben  $c_3$ . Die ausstrahlende, also äussere Oberfläche des Drahtgewindes sei  $\sigma_1$ :

Gemäss Gl. (14) ist  $\tau = \tau_0 e^{-h_1 z}$ , worin:

$$(19) \quad h_1 = \frac{\varepsilon \cdot \sigma_1}{p_1 c + p_2 c_2 + p_3 c_3}$$

nach Gl. (18) ist. Aus Gl. (18) und (19) ergibt sich:

$$(20) \quad h = \frac{\sigma}{\sigma_1} \cdot \frac{p_1 c + p_2 c_2 + p_3 c_3}{p_0 c} \cdot h_1.$$

$h$  bezieht sich auf den in den Dehnungsapparat eingespannten,  $h_1$  auf den aufgewickelten Draht. Um  $h_1$  zu ermitteln, wurde mit der oben beschriebenen Einrichtung eine Versuchsreihe angestellt, indem am Thermometer die Temperaturen  $\tau$  und an einer Secundenuhr die zugehörigen Zeiten  $z$  beobachtet waren. Die Erwärmung des Eisendrahtes nebst Thermometer geschah in einem Sandbade. Behufs Abhaltung des Luftzuges erfolgte die Abkühlung innerhalb eines Glaszylinders von etwa 15 cm Weite. Die Temperatur der Luft im Cylinder wurde vor dem Versuche zu  $15,8^\circ \text{C}$ , nach demselben zu  $15,9^\circ \text{C}$ . bestimmt. Die Beobachtung begann erst, nachdem eine Abkühlung um etwa  $8^\circ$  stattgefunden hatte. Da ich annehmen durfte, dass die Temperatur während des Versuches etwas höher war, setzte ich  $\tau = 16,0^\circ \text{C}$ .

In der Tabelle I sind die Ergebnisse dieser Beobachtung zusammengestellt. Daraus wurden nach Gleichung (15) die darauffolgenden Werthe von  $h_1$  berechnet; dieselben enthält die Tabelle II.

Tabelle I.

Nr.	Min.	Sec.	$\tau$	$\tau - \tau_0$	Nr.	Min.	Sec.	$\tau$	$\tau - \tau_0$
1	0	0	30	14	7	1	19	24	8
2	0	10	29	13	8	1	39	23	7
3	0	21	28	12	9	2	1	22	6
4	0	34	27	11	10	2	30	21	5
5	0	48	26	10	11	3	5	20	4
6	1	2	25	9	12	3	51	19	3

Tabelle II.

Aus Nr.	$h_1$	$\Delta$
1 und 6	0,007 126	+0,000 158
4 „ 8	0,006 954	—0,000 014
2 „ 7	0,007 036	+0,000 068
5 „ 10	0,006 796	—0,000 172
3 „ 9	0,006 931	—0,000 037

Mittel: 0,006 968

Mit der Waage bestimmt, ergab sich  $p_1 = 0,9812 \text{ g}$ ,  $p_2$  und  $p_3$  könnten nur mittelbar durch Berechnung des äusseren

Volumens des Thermometergefässes und der Messung der Dicke  $\delta$  der Glaswand desselben gefunden werden. Dazu wurde eine Nadelspitze auf das Quecksilbergefäss des Thermometers aufgesetzt und die Entfernung  $i_1$  der Spitze und deren Spiegelbild mittelst einer Lupe von der Brennweite  $f$  geschätzt, wobei sich das beobachtende Auge von der Sehweite  $w$  unmittelbar hinter der Linse befand. Danach wäre, wenn die wirkliche Entfernung von Spitze und Bild  $i$  beträgt:

$$(21) \quad \delta = \frac{1}{2} i = \frac{1}{2} \cdot \frac{f}{w + f} i_1.$$

Die Brennweite  $f$  wurde durch einen besonderen Versuch zu 14,2 cm gefunden, es konnte ferner  $w = 25$  cm genommen werden und  $i_1$  wurde durch mehrfache auf die verschiedenste Weise angestellte Beobachtungen auf 0,8 mm geschätzt. Danach ist  $\delta = \frac{1}{2} \cdot [14,2 / (25 + 14,2)] \cdot 0,8 = 0,15$  mm. Da jedoch der Boden des Gefässes viel dicker als die cylindrische Fläche war, so nehme ich  $\delta = 0,2$  mm und lasse den Boden um so mehr ausser acht, als dieser jedenfalls einen Theil seiner Wärme nicht durch die Drahtrolle, sondern das Korkplättchen abgegeben hat.

Ist  $\rho$  der äussere Radius des Gefässes und  $\eta$  die Höhe desselben,  $s_0$  das spec. Gew. des Quecksilbers bei  $0^\circ$  und  $\beta$  der therm. cub. Ausdehnungscoefficient desselben, so ist:

$$(22) \quad p_2 = (\rho - \delta)^2 \pi \cdot \eta \cdot \frac{s_0}{1 + \beta t}.$$

Von der Temperatur des Glases wurde bei der Messung des  $\rho$  abgesehen. Diese ergab als Mittel aus drei Ableisungen an verschiedenen Stellen (3,88; 3,91; 3,83) den Werth  $2\rho = 3,873$  mm, also  $\rho = 1,936$  mm. Es wurde ferner  $\eta = 13,2$  mm gemessen. Da die mittlere Temperatur während der Beobachtung zu  $25^\circ$  C. angenommen werden konnte, so folgt:

$$p_2 = (0,194 - 0,02)^2 \cdot 3,1416 \cdot 1,32 \cdot \frac{13,596}{1 + 0,0001815 \cdot 25} = 1,6993 \text{ g.}$$

Wenn  $S_0$  das spec. Gew. des Glases bei  $0^\circ$  ist, so erhält man:

$$p_3 = \pi \eta (\rho^2 - \delta^2) S_0 = 3,1416 \cdot 1,32 (0,194^2 - 0,02^2) \cdot 2,7 = 0,4169 \text{ g.}$$



Da die Länge des eingespannten Drahtes 1,076 m war und 1 m (nach § 2) 2,2823 g wog, so ist  $p_0 = 2,2823 \cdot 1,076 = 2,4556$  g. Nun sind noch die Werthe von  $\sigma$  und  $\sigma_1$  zu berechnen. Ist der Radius des gespannten Drahtes  $\rho_1$  und seine Länge  $L$ , beide Grössen in Centimetern, so ist  $\sigma = 2\pi\rho_1 L = 2 \cdot 3,1416 \cdot 0,0297 \cdot 107,6 = 20,0800$  qcm. Unter  $\sigma_1$  haben wir die Grösse der emittirenden Oberfläche der Drahtrolle zu verstehen. Da die Windungen sich berührten, so strahlt von jeder derselben nur der zwischen den Berührungsstellen nach aussen liegende Theil aus; ist seine Oberfläche bei einer Windung  $u$ , so ist bei  $m$  Windungen die ausstrahlende Fläche  $\sigma_1 = u \cdot m$ . Ich berechne  $u$  nach der sog. Guldinsregel und sehe von der schraubenförmigen Gestalt der Windungen ab. Die Entfernung des Schwerpunktes der die äussere Wulsthälfte bei der Drehung um die Rollenaxe beschreibenden Halbkreislinie von der Mitte des Halbkreisbogens sei  $\xi$  und der äussere Halbmesser der Rolle  $R$ , so wird:

$$u = 2\rho_1 \pi^2 \left[ R - \rho_1 \left( 1 - \frac{2}{\pi} \right) \right] \quad \text{und folglich:}$$

$$\sigma_1 = 2\rho_1 \pi^2 \left[ R - \rho_1 \left( 1 - \frac{2}{\pi} \right) \right] \cdot m.$$

Nun war  $\rho_1 = 2,77$  mm, die Zahl der Windungen war  $m = 26,5$ , daher:

$$\sigma_1 = 2 \cdot 3,1416^2 \cdot 0,0297 \left[ 0,277 - 0,0297 \left( 1 - \frac{2}{3,1456} \right) \right] \cdot 26,5 = 4,1342 \text{ qcm.}$$

Nimmt man, wie in § 2  $c = 0,1138$ ;  $c_3 = 0,0333$  und  $c_3 = 0,19$ , so wird nach Gl. (20):

$$h = \frac{20,080 \cdot 0,9312 \cdot 0,1138 + 1,699 \cdot 0,0333 + 0,417 \cdot 0,19}{4,134 \cdot 2,4556 \cdot 0,1138} = 0,00697$$

$$h = 0,0293.$$

Dass  $h > h_1$  kann nicht überraschen, wenn man beachtet, dass der gerade gehaltene Draht nach allen Seiten Wärme abgibt.

§ 4. Der Werth des  $\gamma$  hängt von der Ablesungsvorrichtung ab. Die im nächsten Paragraph benutzten Versuchsergebnisse sind mit dem in § 6 (1882 Heft 4) beschriebenen Apparate gewonnen. Ich behalte die dortige Be-

zeichnung bei, wonach  $n_0$  und  $n_1$  die behufs Messung einer Dehnung abgelesenen Scalentheile, dann  $r_1$  die Entfernung des Spiegels von der Scala,  $r_2$  die des Befestigungspunktes des Drahtes von der Drehungsaxe des Hebels ist. Ferner sei  $l$  die wirkliche Verlängerung oder Verkürzung des Drahtes, sämtliche Grössen in Scalentheilen gemessen. Nach § 8 (1882 Heft 4) ist:

$$(23) \quad l = 2r_2 \left[ \frac{n_1 - n_0}{4r_1} - \frac{11}{2} \cdot \frac{n_1^3 - n_0^3}{(4r_1)^3} \right].$$

Da hier die verglichenen Ablesungen immer an derselben Strecke der Scala vorgenommen werden, so kann das zweite Glied vernachlässigt werden. Ist  $n_1 - n_0 = d$ , so ergibt sich:

$$(24) \quad d = 2 \frac{r_1}{r_2} l.$$

Wird in den Gleichungen (1—4)  $L$  in Scalentheilen angegeben, so ist  $\gamma = 2r_1/r_2 = 2.2806/35,4 = 158,530$ , da  $l$  in Gl. (24) die wirkliche Verlängerung des Drahtes in Scalentheilen ist.

§ 5. Die Gleichungen (1) bis (4) gelten zunächst für den Fall, dass die Zeit  $z_0$  der An- und Abspannung dieselbe ist. Dies ist im allgemeinen bei den Versuchen meiner Untersuchung (1882 Heft 4) der Fall. Ausnahmen sind dort bemerkt. Diese Versuchszahlen sollen hier benutzt werden. Die in den vorigen Paragraphen ermittelten Constanten  $k$  und  $h$  beziehen sich auch auf die in der obenerwähnten Arbeit benutzte Eisensorte.

Da es sich insbesondere um das letzte Glied der Relationen (1) bis (4) handelt, so mögen nachstehende Kürzungen zweckdienlich sein:

$$(25) \quad {}^v F'_{z_0} = \gamma \cdot L \cdot \alpha'_i \cdot k \lambda_0 \cdot \frac{1}{h z_0} \cdot \frac{e^{h z_0} - 1}{e^{h z_0} + 1} \left[ 2 - \frac{1}{(e^{h z_0})^{2v}} \cdot (e^{h z_0} - 1) e^{h z_0} \right].$$

$$(26) \quad {}^v F''_{z_0} = \gamma \cdot L \cdot \alpha''_i \cdot k \lambda_0 \cdot \frac{1}{h z_0} \cdot \frac{e^{h z_0} - 1}{e^{h z_0} + 1} \left[ 2 + \frac{1}{(e^{h z_0})^{2v}} \cdot (e^{h z_0} - 1) \right].$$

$$(27) \quad {}^v F_{z_0} = \gamma \cdot L \cdot k \lambda_0 \cdot \frac{1}{h z_0} \cdot \frac{e^{h z_0} - 1}{e^{h z_0} + 1} \left\{ \frac{1}{(e^{h z_0})^{2v}} \cdot (e^{h z_0} - 1) [\alpha'_i e^{h z_0} + \alpha''_i] - 2(\alpha'_i - \alpha''_i) \right\}.$$

Die Gl. des § 1 nehmen danach die übersichtlichere Gestalt:

$$(28) \quad \lambda + {}^v l' = (b_v - a_v) + {}^v F'_{z_0}$$

$$(29) \quad \lambda - {}^v l'' = (b_v - c_v) + {}^v F''_{z_0} \text{ und:}$$

$$(30) \quad {}^v l' + {}^v l'' = (c_v - a_v) - ({}^v F''_{z_0} - {}^v F'_{z_0}) = (c_v - a_v) - {}^v F_{z_0} \text{ an.}$$

Dabei ist für die erwähnten Versuche (1882 Heft 4):

$L = 538$  Scalenth.,  $hz_0 = 0,0293 \cdot 24 = 0,7032$ ,  $\gamma = 158,53$ ,  
 $e^{hz_0} = 2,7183^{0,7032} = 2,0200$ ,  $k\lambda_0 = \Delta t = 0,1638$  (bei  $5^\circ \text{ C.}$ ),  $\alpha_5''$   
 $= 0,000\,010\,88$  (§ 14, 1882 Heft 4),  $h = 0,0293$ ,  $z_0 = 24$  Se-  
 cunden (Mittelwerth).

Bei dem Coëfficienten  $\alpha_5'$  berücksichtige ich vorerst  
 dessen Aenderung infolge der Spannung.<sup>1)</sup> Danach ist,  
 wenn  $E_0$  und  $E_{10}$  die Elasticitätsmoduln bei den beigesetzten  
 Temperaturen sind, und die übrigen Werthzeichen ihre bis-  
 herige Bedeutung haben:

$$(31) \quad \alpha_5' = \alpha_5'' + \frac{\Delta p}{9(10-0)} \cdot \left( \frac{1}{E_{10}} - \frac{1}{E_0} \right).$$

Da  $\Delta p$  der Zug in der Flächeneinheit des Quer-  
 schnittes, ist:

$$\alpha_5' = 0,000\,010\,88 + \frac{35,657}{10} \left( \frac{1}{20212} - \frac{1}{20310} \right) = 0,000\,011\,74.$$

Somit ist:

$${}^v F'_{24} = 158,53 \cdot 538 \cdot 0,000\,011\,74 \cdot 0,1638 \cdot \frac{1}{0,7032} \cdot \frac{2,02 - 1}{2,02 + 1} \cdot \left[ 2 - \frac{1}{2,02^{2v}} (2,02 - 1) \cdot 2,02 \right].$$

${}^v F'_{24} = 0,1575 - 0,1623 \cdot 0,4951^{2v}$ , also  ${}^1 F'_{24} = 0,1178$ ,  
 ${}^2 F'_{24} = 0,1477$ ,  ${}^3 F'_{24} = 0,1551$ ,  ${}^4 F'_{24} = 0,1569$ ,  ${}^5 F'_{24} = 0,1574$  Sca-  
 lentheile.

Ferner ist:

$${}^v F''_{24} = 158,53 \cdot 538 \cdot 0,000\,010\,88 \cdot 0,1638 \cdot \frac{1}{0,7032} \cdot \frac{2,02 - 1}{2,02 + 1} \left[ 2 + \frac{1}{2,02^{2v}} (2,02 - 1) \right].$$

${}^v F''_{24} = 0,1460 + 0,0745 \cdot 0,4951^{2v}$ ,  ${}^1 F''_{24} = 0,1643$ ,  ${}^2 F''_{24}$   
 $= 0,1505$ ,  ${}^3 F''_{24} = 0,1471$ ,  ${}^4 F''_{24} = 0,1463$ ,  ${}^5 F''_{24} = 0,1461$  Sca-  
 lentheile.

Endlich ist:

${}^1 F_{24} = {}^1 F'_{24} - {}^1 F''_{24} = 0,0465$ ,  ${}^2 F_{24} = 0,0028$ ,  ${}^3 F_{24} = 0,0080$ ,  
 ${}^4 F_{24} = -0,0106$ ,  ${}^5 F_{24} = -0,0114$  Scalentheile.

1) Dahlander, Pogg. Ann. 145. p. 147. 1872.

Die Werthe sind auf vier Stellen nur behufs Gewinnung der Uebersicht über den Verlauf derselben angegeben.

Man sieht, dass das von  $v$  unabhängige Glied wegen  $\alpha'_i$  und  $\alpha''_i$  bei der Verlängerung und Verkürzung verschieden ist. Die Differenz beträgt:  $0,1575 - 0,1461 = 0,0114$ . Das von  $v$  abhängige Glied nimmt anfänglich rasch, dann langsam ab, sodass man schon nach den ersten An- und Abspannungen dem Grenzzustande genügend nahe ist. Auf die Messung von  $\lambda$  übt sonach die durch Dehnung erzeugte Temperaturveränderung im allgemeinen noch einen beim Ablesen merkbaren Einfluss aus, da Zehntel von Scalentheilen noch geschätzt werden können. Dagegen kann ein Einfluss auf die Messung der elastischen Nachwirkung nicht angenommen werden.

Bezeichnet man mit  $v_0$  den Werth von  $v$ , für welchen man das von  $v$  abhängige Glied in den Ausdrücken (25), (26), (27) vernachlässigen darf (hier gewöhnlich  $v_0 = 5$  genommen), so ist, wenn man noch:

$$\alpha'_i = \alpha''_i = \alpha_i \text{ setzt:}$$

$$(32) \quad {}^v F'_{z_0} = {}^v F''_{z_0} = 2\gamma \cdot L \cdot \alpha_i \cdot k \lambda_0 \cdot \frac{1}{h z_0} \cdot \frac{e^{h z_0} - 1}{e^{h z_0} + 1}.$$

Schon der Natur der Sache gemäss kann der Werth dieses Ausdrucks sich mit  $z_0$  nur wenig ändern. In der That ist:

$$\left\{ \frac{1}{h z_0} \cdot \frac{e^{h z_0} - 1}{e^{h z_0} + 1} \right\}_{z_0=0} = \frac{1}{2} \quad \text{und:} \quad \left\{ \frac{1}{h z_0} \cdot \frac{e^{h z_0} - 1}{e^{h z_0} + 1} \right\}_{z_0=\infty} = 0,$$

sodass einer Schwankung des  $z_0$  von 0 bis  $\infty$  nur eine von  $\gamma \cdot L \cdot \alpha_i \cdot k \lambda_0$  bis 0, also etwa 0,1640 entspricht. So berechnet sich für  $5^\circ \text{C.}$ :

$${}^v F'_{10} = 0,1628; \quad {}^v F'_{24} = 0,1575; \quad {}^v F''_{100} = 1266.$$

Für Versuche, welche bei höheren Temperaturen vorgenommen werden, gestalten sich die Werthe  ${}^v F'$  und  ${}^v F''$  wegen der Aenderung von  $\alpha_i$  und  $k \lambda_0$  etwas anders. So ist für Temperaturen zwischen  $90$  und  $100^\circ \text{C.}$  nach § 11 und 14 (1882 Heft 4):

$$\alpha_{90}^{100} = \frac{L_{100} - L_{90}}{L_{90}(100 - 90)} = \alpha' + \alpha''(t + T),$$

$$\alpha_{90}^{100} = 0,000\,010\,73 + 0,000\,000\,0148(100 + 90),$$

$$\alpha_{90}^{100} = 0,000\,013\,54.$$

Nach § 2 ist für diesen Fall  $k\lambda_0 = 0,2198$  somit  ${}^vF'_{24} = {}^vF'_{24} = 0,24$  Scalentheile.

Danach darf also für die hier in Betracht kommenden Versuchsverhältnisse mit Eisendraht für  ${}^vF'_{24} = {}^vF'_{24}$  ein Werth angenommen werden, der entsprechend der Temperatur, bei welcher die Versuche angestellt worden sind, von 0 bis 100° C. von 0,15 auf 0,24 Scalentheile sich hebt und als Correctionswerth in Betracht gezogen werden muss.

**IX. Ueber die Zulässigkeit der Annahme eines electrischen Sonnenpotentials und dessen Bedeutung zur Erklärung terrestrischer Phänomene; von Werner Siemens.**

(Vorgelegt d. k. Akad. d. Wiss. zu Berlin am 31. Mai 1883.)

Mein Bruder, Sir William Siemens, hat in seiner Schrift „On the conservation of solar energy“ die Hypothese aufgestellt, dass die Sonne ein hohes electrisches Potential besäße, welches vielleicht die Lichterscheinung des Zodiakallichtes hervorbrächte. Er erklärt die Entstehung und Erhaltung dieses electrischen Potentials durch Reibung der nach seiner Theorie der Sonne in ihren Polarregionen aus dem Weltraum zuströmenden, durch die von ihr ausgehenden Licht- und Wärmestrahlen dissociirten Materie. Diese würde nach eingetretener Verdichtung wieder verbrennen und dann dem Sonnenäquator zuströmen. Hierbei würde sie durch Reibung mit dem rotirenden Sonnenkörper electricisirt werden und dann durch die Centrifugalkraft der Sonnenrotation im electricisirten Zustande von neuem im Weltraum verbreitet.

Nimmt man diese von anderen Seiten viel bestrittene Theorie meines Bruders als richtig an, so liegt in der That eine ähnliche Erscheinung vor, wie die von mir beschriebene<sup>1)</sup> Electricisirung der Spitze der Cheops-Pyramide durch den emporwirbelnden Wüstenstaub. Man könnte dann annehmen, dass der als leitend und von dem ihn umgebenden Flammen-

1) W. Siemens, Pogg. Ann. 109. p. 355. 1860.

meer, der Photosphäre, isolirt gedachte Sonnenkörper die eine der durch die Reibung getrennten Electricitäten festhielte, während die andere im Weltraum durch Convection verbreitet würde. Da man dann auch annehmen muss, dass diese Convection über die Bahnen der Planeten weit hinausgeht, so müsste der Sonnenkörper für diese ein electrisches Potential haben und vertheilend auf sie wirken.

Ich will auf den Streit über die Zulässigkeit der Theorie meines Bruders nicht näher eingehen, verkenne auch das Gewicht mancher der dagegen zur Geltung gebrachten Gründe nicht, bin aber der Ansicht, dass die durch diese Theorie gegebene Möglichkeit der Annahme eines electrischen Sonnenpotentials in hohem Maasse für sie spricht, da einige der bedeutendsten terrestrischen Naturerscheinungen durch dasselbe ihre bisher vergeblich gesuchte Erklärung finden würden, und da andererseits bei dem jetzigen Stande der naturwissenschaftlichen Kenntniss kaum eine andere Erklärung für das Vorhandensein eines electrischen Sonnenpotentials zu finden sein wird. Denn bisher ist uns kein Vorgang bekannt, bei welchem nur eine Electricität hervorgerufen wird. Wir kennen nur Scheidungen der beiden Electricitäten, und wenn auch solche Scheidungen bei den gewaltigen mechanischen und chemischen Actionen an der Oberfläche des Sonnenkörpers aller Voraussicht nach in sehr hohem Grade auftreten, so müssen sie sich durch Leitung doch innerhalb desselben wieder ausgleichen, und selbst wenn eine dauernde Trennung beider Electricitäten im Sonnenkörper fortbestände, würde doch keine Fernwirkung einer derselben eintreten können. Solange also nicht neue, noch gänzlich unbekannte Thatsachen auftreten, bleibt die Annahme eines electrischen Sonnenpotentials an die Convectionstheorie meines Bruders gebunden!

Ich mag aber nicht unterlassen, kurz auf den gewichtigsten Einwand gegen diese Theorie, der ihr von den Herren Faye und Hirn entgegengesetzt ist, einzugehen. Derselbe besteht darin, dass die Unveränderlichkeit der Umlaufzeit der Planeten um die Sonne die Annahme eines mit Materie gefüllten Raumes principiell nicht zuliesse. Die

astronomischen Beobachtungen geböten unbedingt die Annahme einer absoluten Leere des Weltraumes, da bei der gewaltigen Geschwindigkeit der Fortbewegung der Planeten auch eine äusserst verdünnte Atmosphäre doch noch eine messbare Verminderung der planetarischen Geschwindigkeit, mithin eine Verkürzung ihrer Umlaufzeit hervorbringen müsste. Dies wäre auch richtig, wenn die Voraussetzung zuträfe, dass die Atmosphäre des Weltraumes in relativer Ruhe wäre. Das kann aber nicht der Fall sein, wenn der von meinem Bruder angenommene Kreislauf wirklich stattfindet. Man muss annehmen, dass die Sonnenatmosphäre nahe dieselbe Umlaufzeit hat, wie der Sonnenkörper. Eine etwa durch die gewaltigen auf- und niedergehenden Strömungen in der Sonnenatmosphäre, die durch die Verbrennung der durch Ausdehnung abgekühlten Sonnenbestandtheile und die Abkühlung der verbrannten äussersten Schichten der Photosphäre durch Ausstrahlung entstehen müssen, herbeigeführte Differenz in der Rotationsgeschwindigkeit wird durch Reibung der verschiedenen schnell rotirenden Theile der Sonnenatmosphäre gegeneinander fortwährend wieder ausgeglichen werden. Ueber die Höhe dieser mit dem Sonnenkörper gleichmässig rotirenden Atmosphäre ist noch nichts bekannt. Nach Ritter's<sup>1)</sup> Berechnungen nimmt zwar die Dichtigkeit der Sonnenatmosphäre nach der sprungförmigen Aenderung der adiabatischen Curve in der Region der Photosphäre, in welcher der Wärmezuschuss durch die Verbrennungswärme die der fortschreitenden Verdünnung entsprechende Temperaturabnahme bedeutend verlangsamt, sehr schnell ab — wir kennen aber die Grenze der Verdünnung noch nicht, bis zu welcher das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz in Geltung bleibt. Erreicht die Atmosphäre aber die Grenze, in welcher Anziehungskraft und Centrifugalkraft sich das Gleichgewicht halten, so muss jedes diese überschreitende materielle Molecül von nun ab wie ein Planet um die Sonne rotiren. Fände ein stetes Nachdringen von neuen diese Grenze erreichenden Massentheilchen statt, so müsste sich hier eine fortschreitende Ver-

1) Ritter, Wied. Ann. 5. p. 405, 543. 1878 u. ff.



dichtung der Materie, mithin ein Ring bilden, der nach den Kepler'schen Gesetzen seine Rotation um die Sonne vollzöge. Diese Ringbildung kann aber bei der vorausgesetzten Continuität der Sonnenatmosphäre nicht eintreten, da die gegenseitige Reibung der Gasschichten auch über die Gleichgewichtsfläche hinaus fort dauert, mithin auch die bereits in planetarischer Bewegung befindlichen Gasschichten einer Beschleunigung unterliegen. Die Folge muss sein, dass sich mit der Zunahme der Geschwindigkeit auch der Abstand aller dieser Mikroplaneten von der Sonne fortwährend vergrößert, dass mithin der von meinem Bruder angenommene stetige Ausfluss von Sonnenatmosphäre in den Weltraum wirklich stattfinden muss. Derselbe kann nur in der Zone des Sonnenäquators stattfinden, da hier die Centrifugalkraft bei gleichem Abstände vom Sonnencentrum am grössten ist. Es muss auch angenommen werden, dass die Dichtigkeit dieser, überall in Uebereinstimmung mit den Kepler'schen Gesetzen rotirenden Atmosphäre in der Ebene des Sonnenäquators bis auf grosse Entfernungen von der Sonne hinaus constant bleibt, da die Schwerkraft der Sonne überall durch die Umlaufgeschwindigkeit äquilibrirt ist. In den senkrecht auf der Sonnenäquatorebene stehenden Richtungen muss die Dichtigkeit dagegen abnehmen, da die Sonnenanziehung sich mit der Entfernung von der Sonnenäquatorebene vermindert.

Es folgt aus dieser Betrachtung, dass ein mit der Erscheinung des Zodiakallichtes zusammenfallender, von der Sonne ausgehender materieller Strom überall die Umlaufzeit von Planeten haben muss, die sich in dem betreffenden Sonnenabstände befinden. Von einem Widerstande, den Planeten durch die mit ihnen nahe gleichmässig sich um die Sonne bewegendem materiellen Theile des interplanetarischen Raumes erföhren, kann also keine Rede sein. Nur ein — hier zu vernachlässigender — Widerstand infolge der Neigung ihrer Ekliptik zur Ebene des Sonnenäquators muss stattfinden, auf den vielleicht die beobachtete Verminderung dieses Neigungswinkels zurückzuführen sein wird. Auch die Satelliten müssen bei der Rotation um ihre Planeten einen Wider-

stand durch die Atmosphäre des Weltraumes erfahren, wie auch die äusserste Grenzschrift der mit den Planeten rotirenden Atmosphäre derselben einen Reibungswiderstand erleiden muss. Vielleicht hat Hr. Hirn hinsichtlich des Mondes recht mit seiner Behauptung, dass bei der grossen Bewegungsgeschwindigkeit der Himmelskörper auch das verdünnteste widerstehende Medium die Atmosphäre derselben fortfeigen müsste!

Viele Beobachtungen machen es sehr wahrscheinlich, dass der Weltraum wenigstens innerhalb der Region unseres Sonnensystems mit brennbarem Stoffe erfüllt ist. Es spricht dies indirect auch sehr entschieden für die Annahme meines Bruders, dass die Verbrennungsproducte im Zustande grösster Verdünnung und sehr niedriger Temperatur durch die Sonnenstrahlen wieder dissociirt werden. Der gemachte Einwand, dass die Dissociationsarbeit die Energie der Lichtstrahlen absorbiren würde und der Weltraum dadurch undurchsichtig werden müsste, liesse sich durch die Annahme beseitigen, dass es nur die unsichtbaren, chemisch wirkenden Strahlen sind, welche die Dissociationsarbeit verrichten. Man kann aber auch annehmen, dass die Dissociationsarbeit im Laufe der Zeiten bereits vollführt ist, und dass jetzt nur noch die von der Sonne fortdauernd ausgehende, noch chemisch verbundene Masse von ihren Lichtstrahlen zu dissociiren ist — wozu nur ein Theil der Lichtenergie verbraucht würde. Es wäre ohne die Annahme der Dissociation nicht recht erklärlich, warum der Weltraum nicht wie die Atmosphäre der Erde wesentlich mit Sauerstoff, Stickstoff und Wasserdampf erfüllt wäre. Es lässt sich doch nicht annehmen, dass die Zusammensetzung des Sonnenkörpers eine wesentlich verschiedene von der der Erde ist, wenn beide aus derselben rotirenden kosmischen Nebelmasse hervorgegangen sind, da eine Scheidung der Materie nach dem specifischen Gewichte bei gasförmigem Zustande nicht anzunehmen ist. Es müssen daher, wenigstens in unserem Sonnensystem, die electronegativen Stoffe überall vorherrschend sein, und es ist anzunehmen, dass auch die erkaltete ausgebrannte Sonne dereinst von einer Sauerstoff im Ueberschuss enthaltenden Atmosphäre

umgeben sein wird. Ist aber der Weltraum mit dissociirten Verbrennungsproducten in grosser Verdünnung erfüllt, so müssen dieselben der Sonnenattraction überall da anheim fallen, wo sie nicht, wie in der Nähe der Aequatorialebene der Sonne, ihrer Anziehung durch die planetarische Rotation entzogen sind. Es muss daher namentlich in den Polarregionen, wo die Centrifugalkraft ganz fehlt, ein steter Zustrom dissociirter Materie zur Sonne stattfinden, wie mein Bruder es annimmt. Bleibt die Sonnenmasse, wie wohl vorauszusetzen ist, unverändert dieselbe, so heisst das, dass ein Gleichgewichtszustand eingetreten ist, bei welchem ebenso viel verbrannte Materie von der Sonne in ihrer Aequatorialzone ausströmt, wie ihr durch Massenanziehung im dissociirten Zustande in den Polarregionen wieder zugeführt wird. Demnach würde denn auch die Strömung von den Polen zum Aequator, sowie auch die nachgewiesene geringere Winkelgeschwindigkeit der Rotation der gasförmigen Sonnenmasse in ihren höheren Breiten gegeben sein.

Wenn hierdurch aber auch die Möglichkeit der Entstehung eines electrischen Sonnenpotentials durch Friction und continuirliche Entfernung der mit der einen Electricität geladenen Körpertheile von der Sonne gegeben ist, so bleibt der Mechanismus dieser Electrification doch noch sehr dunkel. Das Licht der Sonne geht von einem Flammenmeere aus, welches nach Ritter's schönen Rechnungen eine Dicke von ca. 25 km haben muss. Ob eine Flamme verbrennender Gase von dieser Dicke noch viel Wärme und Lichtstrahlen einer heisseren Emissionsquelle durchlassen, wieviel sie von denselben absorbiren oder wie eine Wolkenschicht zurückwerfen wird, können wir nicht wissen. Ich habe kürzlich<sup>1)</sup> den Nachweis geführt, dass Gase, welche bis auf 1500 bis 2000° C. erhitzt sind, noch vollständig dunkel erscheinen, während sie die langsamer schwingenden Wärmestrahlen schon bei geringer Temperaturerhöhung emittiren. Ob Gase bei noch weit höherer Erhitzung selbstleuchtend werden, ist durch das Experiment bisher nicht festgestellt. Da eine

1) W. Siemens, Berl. Ber. 1882. p. 961. — Wied. Ann. 18. p. 311. 1883.

kleine Flamme aber im helleren Lichte schon einen Schatten wirft, so erscheint es unwahrscheinlich, dass viele der von tieferen und heisseren Sonnenschichten ausgehenden Licht- und Wärmestrahlen die mächtige Photosphäre zu durchdringen vermögen. Die beobachtete Sonnentemperatur und das Sonnenlicht sind dann Erscheinungen, die ihren Ursprung wesentlich in der chemischen Thätigkeit haben, die in der Sonnenatmosphäre verläuft. Diese bedingt, dass die im dissociirten Zustande aufsteigende und dabei durch Volumenvergrößerung sich abkühlende Sonnenatmosphäre zu verbrennen beginnt, wenn die Dissociationstemperaturgrenze für die betreffende Verbindung überschritten ist, und dass diese Verbrennung so lange fort dauert, bis der Wärmeverlust durch Ausdehnung gleich der freigewordenen Verbrennungswärme ist. Die scheinbare Sonnentemperatur wird daher annähernd die Dissociationstemperatur sein, und zwar die Dissociationstemperatur derjenigen Verbindungen, welche das grösste chemische Wärmeäquivalent haben, mithin des Wassers, dessen Bestandtheile in grösster Höhe verbrennen werden, während die schwereren und zugleich eine höhere Dissociationstemperatur besitzenden Massen schon in niedrigeren Regionen verbrennen. Um diesen Auftrieb der dissociirten Sonnenbestandtheile und ihre damit verbundene Verbrennung im Gange zu erhalten, müssen die endlichen Verbrennungsproducte zum Sonnenkörper zurückkehren. Wie Faye, Ritter, Reye und andere schon dargelegt haben, geschieht dies einmal deswegen, weil die Verbrennungsproducte ein grösseres specifisches Gewicht haben, als die unverbrannten Gase, und zweitens infolge der Abkühlung der höheren Schichten der Photosphäre durch Wärme- und Lichtstrahlung. Dadurch wird das adiabatische Gleichgewicht der über einander gelagerten Gasschichten gestört und die relativ schwerer gewordenen höheren müssen in niedergehenden Strömen zur Sonnentiefe zurückkehren. Dass diese niedergehenden Ströme nur in mittleren Sonnenbreiten als Sonnenflecken sichtbar werden, hat seinen Grund darin, dass nur hier die Bedingungen für eine rotirende Bewegung des niedergehenden Stromes vorhanden sind, wodurch demselben eine verticale Richtung gegeben wird. Die trichter-

förmige Verminderung des Durchmessers der Sonnenflecke ist die Folge der grossen Volumenverminderung durch den rasch zunehmenden Druck. Der innere Raum der Trichter muss relativ dunkel sein, da hier die leuchtende Flammenbildung fehlt, da die Temperatur um den Betrag der Dissoziationswärme geringer sein muss, als die umgebende noch unverbrannte Sonnensubstanz, und da vielleicht schon Condensationsproducte auftreten, welche als Schirm die Strahlung der heller leuchtenden tieferen Sonnenschichten zurückhalten. Andererseits ist es nicht unwahrscheinlich, dass die hoch auflodernden Sonnenfackeln aus Blasen von richtig gemischtem Knallgas oder mit Sauerstoff im richtigen Verhältniss gemischtem Kohlengase bestehen, welche infolge geringeren specifischen Gewichtes und grösserer Wärmeentbindung bei der Verbrennung unter Durchbrechung der Penumbra und der Photosphäre hoch emporgetrieben werden und bei der Abwesenheit leuchtender Flammenbestandtheile die Strahlen der heisseren tieferen Sonnenschichten zum Theil durchlassen. Die mechanisch kaum zulässige colossale Geschwindigkeit des Aufleuchtens mancher Fackeln könnte dann in dieser Strahlung aus der Sonnentiefe ihre Erklärung finden. Mein Bruder nimmt in einem neuerdings publicirten Nachtrage zu seiner Sonnentheorie an, der Sonnenkörper selber könne nicht heisser wie etwa  $3000^{\circ}$  C. sein, da bei höherer Temperatur die chemischen Strahlen die überwiegenden würden, und bei sehr viel höherer Temperatur die Sonne sogar zu leuchten aufhören müsste. Es könnte das richtig sein, wenn die Photosphäre nicht als Schirm die heisseren Strahlen des Sonnenkörpers zurückhielte, wie es wahrscheinlich ist. In der That können wir aus Analogien der Beobachtungen keinen einigermaßen sicheren Schluss ziehen, ob ein auf Hunderttausende oder gar Millionen von Graden erhitzter Körper noch leuchten wird. Es könnten von ihm sogar nur Strahlen so geringer Wellenlänge ausgehen, dass sie auch keine chemische Arbeit mehr leisteten! Dann wäre der scheinbar dunkle Kern der Sonnenflecke auch so zu erklären, dass die flammenlosen, durch eintretende Dissociation relativ abgekühlten, zur Sonne zurückkehrenden Verbrennungspro-

ducte durchsichtig blieben und den für die Lichtstrahlung zu hoch erhitzten tieferen Sonnenschichten die Durchstrahlung gestatteten! Dafür würde sogar die violette Farbe der Kerne der Sonnenflecke sprechen. Für darstellbare Temperaturen gilt allerdings das Gesetz, dass neben den der höheren Temperatur entsprechenden schnellen Aetherschwingungen auch die ganze Scala der langsameren auftritt, ob sich das aber bei so ungemein viel höheren Temperaturen nicht ändert, kann man nicht wissen.

Es war nöthig, auf die wahrscheinliche Beschaffenheit des Sonnenkörpers und seiner Licht und Wärme ausstrahlenden Umhüllung etwas näher einzugehen, um eine Grundlage für die Beantwortung der Frage zu gewinnen, ob bei dem jetzigen Umfange unseres Wissens die Annahme eines electricischen Sonnenpotentials als zulässig erscheint. Wie schon hervorgehoben, ist seine Entstehung nur denkbar, wenn ein Scheidungsvorgang beider Electricitäten an der Sonnenoberfläche stattfindet, und wenn gleichzeitig die eine der geschiedenen Electricitäten abgeleitet wird. Da die Flamme ein guter Leiter der Electricität ist, so kann man die ganze Photosphäre und die wahrscheinlich auch schon an dem Verbrennungsvorgange theilnehmende Penumbra als einen leitenden Mantel betrachten, welcher den heisseren Sonnenkörper umhüllt. Da Flammen ferner die Eigenschaft haben, in ähnlicher Weise, wie Spitzen, die Electricität an ihre Umgebung, hier also an ihre gasförmigen Verbrennungsproducte zu übertragen, so muss die Photosphäre durch eine theilweise Ausströmung der Verbrennungsproducte in den Weltraum continuirlich entladen werden. Wäre also die Photosphäre von dem noch nicht in der Verbrennung begriffenen tieferen Sonnenkörper isolirt und dieser als ein Leiter der Electricität zu betrachten, so könnte er electricisch geladen werden durch Reibungs- oder auch chemische Vorgänge, die zwischen dem leitenden Sonnenkörper und der Photosphäre stattfänden. Die Frage, ob heisse Gase Leiter der Electricität sind, auch wenn keine Flammenerscheinung in ihnen stattfindet, ist noch nicht durch directe Versuche entschieden. Dass die Gase, wie alle Körper, Leiter der

Elect  
Mol  
satu  
auch  
rech  
185  
Es  
dad  
sch  
das  
ver  
Dir  
erh  
lass  
wie  
Ge  
vor  
hit

188  
das  
dur  
Leu  
lich  
Be  
kar  
Ga  
the  
wie  
ers  
das  
an  
Du  
die  
ne  
me  
beg  
we  
Du  
Po



Electricität werden, wenn die dielectrische Polarisation ihrer Moleculé ihr Maximum erreicht hat, und dass dieses Polarisationsmaximum mit der Verdünnung der Gase — mithin auch mit ihrer Erwärmung vom absoluten Nullpunkt ab gerechnet — proportional abnimmt, habe ich bereits im Jahre 1857<sup>1)</sup> bei Beschreibung meines Ozonapparates nachgewiesen. Es unterscheiden sich danach Leiter von Nichtleitern nur dadurch, dass bei ersteren das Polarisationsmaximum verschwindend klein ist. Dass bei sehr hoch erhitzten Gasen das Polarisationsmaximum, wie bei den metallischen Leitern, verschwindend klein werden sollte, ist kaum anzunehmen. Directe Versuche über die dielectrischen Eigenschaften hoch-erhitzter flammenfreier Gase sind mir nicht bekannt, doch lassen sich die Erscheinungen des electrischen Funkens, sowie die Leuchterscheinung in dem Ozonapparat und den Geissler'schen Röhren, sowie auch die schönen Versuche von Hittorf<sup>2)</sup> auch ohne die Annahme, dass sehr hoch erhitzte Gase in anderer Weise leiten, wie kalte von gleicher

1) W. Siemens, Pogg. Ann. 102. p. 66. 1857.

2) Hr. Hittorf sagt in einer Mittheilung in Wied. Ann. 19. p. 73. 1883, dass meine der Academie am 9. Nov. 1882 gemachte Mittheilung, dass Gase bei Temperaturen von 1500 bis 2000° C. noch vollständig dunkel erscheinen, wenn sie vollkommen flammenfrei sind, und dass das Leuchten der Gase beim Durchgange eines electrischen Stromes ein ähnlicher Vorgang sei, wie das Leuchten einer Flamme, welche keine festen Bestandtheile ausscheidet, von ihm selbst und anderen schon früher bekannt gemacht sei. Ich gebe dies hinsichtlich des Nichtleuchtens heisser Gase gern zu, habe überhaupt keine Prioritätsansprüche an diese Mittheilung geknüpft, glaube jedoch, dass ich zuerst experimentell nachgewiesen habe, dass so hoch erhitzte Gase wirklich vollkommen dunkel erscheinen, wenn auch die heisse Luftschicht über einen Meter dick ist, und das Auge durch volle Dunkelheit den höchsten Grad von Empfindlichkeit angenommen hat. Die Hittorf'schen Versuche wiesen nur eine relative Dunkelheit heisser Gase nach. Die Leitungsfähigkeit der Gase anlangend, die Faraday für hohe Spannungen schon annahm, so habe ich in meinem oben angeführten, ca. 25 Jahre älteren Aufsätze bereits das allgemeine Gesetz aufgestellt, nach welchem die Leitungsfähigkeit der Gase beginnt. Hierauf möchte ich auch Hrn. E. Wiedemann hinweisen, welcher die Priorität für die Erklärung des Leuchtens der Gase beim Durchgange eines electrischen Stromes als Folge einer dielectrischen Polarisation in Anspruch nimmt.



Dichte, erklären. Die hohe Temperatur der Sonnengase scheint daher bisher kein Hinderniss zu sein, ihnen isolirende Eigenschaften zuzuschreiben. Ihr Polarisationsmaximum wird sogar, der Dichte der Sonnenatmosphäre entsprechend, trotz ihrer hohen Temperatur grösser sein, als das unserer kalten atmosphärischen Luft.

Ganz andere Verhältnisse können aber eintreten bei Eintritt des kritischen Zustandes in grösseren Sontentiefen. Für die electriche Eigenschaft des kritischen Zustandes haben wir weder Versuche noch Analogien, können daher das Sonneninnere auch als eine metallisch, d. i. mit verschwindend kleinem Polarisationsmaximum, leitende Masse annehmen. Die Oberfläche dieser im kritischen Molecularzustande befindlichen Sonnenmasse könnte dann ein electrisches Potential haben. Es müsste hierbei aber die Frage in Betracht gezogen werden, ob die leitende Photosphäre nicht an ihrer dem Sonneninneren zugewandten Fläche durch Vertheilung electriche werden könnte, so dass die Sonne mit ihrer sie umhüllenden Photosphäre selbst eine gewaltige Leydener Flasche bildete, wodurch eine Fernwirkung der Electricität des leitenden Sonnenkerns grösstentheils ausgeschlossen würde. Ohne weiteres liess sich dies nicht annehmen, da die Leitungsfähigkeit der Flamme offenbar ganz andere, direct mit dem Verbrennungsvorgange selbst zusammenhängende Ursachen hat, wie die der nicht in chemischer Action befindlichen leitenden Körper, so dass eine Analogie zwischen beiden hinsichtlich ihrer electriche Vertheilungsfähigkeit kaum zu ziehen ist. Ich habe daher einige Versuche darüber angestellt, ob eine Flamme der Influenzwirkung in gleicher Weise unterliegt, wie andere Leiter, und diese Versuche haben die Voraussetzung bestätigt. Danach können zwei von einander isolirte Flammen in gleicher Weise als Belegungen einer geladenen Leydener Flasche auftreten, wie andere Leiter.<sup>1)</sup> Es muss hiernach angenommen werden,

1) Der Versuch wurde in der Weise angestellt, dass ein ringförmiger Gasbrenner isolirt wurde. Bei geöffnetem Gashahn erhob sich über demselben eine etwa 15 cm hohe cylindrische Flamme von ca. 2 cm Durchmesser. Die Flamme durchstrich einen isolirt angebrachten, sie concen-

dass der Sitz der Sonnelectricität wesentlich in der Photosphäre zu suchen ist und nicht in dem Sonnenkörper selbst. Die electricischen Eigenschaften der Flamme sind — trotz aller bisher mit denselben angestellten Versuche — noch sehr unklar. Namentlich ist noch nicht entscheidend festgestellt, ob eine durch sie selbstthätig erzeugte Potentialdifferenz zwischen den verschiedenen Zonen der Flamme, besonders zwischen derjenigen, wo die Verbrennungserscheinung beginnt, und der, wo sie erlischt, besteht oder nicht. Wäre dies der Fall, wie aus einigen Versuchen von Riess und anderen wahrscheinlich erscheint, so könnte auch hierin bei den gewaltigen Dimensionen des die Sonne umgebenden Flammenmeeres und bei den ihnen entsprechenden grossen Differenzen in der Temperatur und der Dichtigkeit die Ursache der Sonnelectricität gesucht werden, da die Electricität der äusseren Schichten der Photosphäre dann auf die Verbrennungsproducte überginge und mit ihnen nach der Theorie meines Bruders zum Theil in der Richtung der Rotationsebene der Sonne im Weltraum verbreitet würde.

trisch umgebenden Metallcylinder von ca. 8 cm Durchmesser. Zur Herstellung der leitenden Verbindung mit der Flamme wurde ein isolirter kreisförmig gebogener Platindraht in den unteren Theil der Flamme gelegt. Die zwischen diesem Platindraht und dem Metallcylinder durch eine galvanische Kette von 50 Daniells stattfindende Ladung wurde nun mit Hülfe meiner bekannten, schnell oscillirenden electro-magnetischen Wippe gemessen, und zwar abwechselnd bei fast ganz geschlossenem und bei geöffnetem Gashahn. Die Differenz der Ablenkungen des Spiegelgalvanometers war dann ein Maass der Capacität der aus Flamme und Metallcylinder gebildeten Leydener Flasche. Die erzielten Resultate sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Zahl der Oscillationen der Wippe pro Minute	Differenz der Scalenaflenkung zwischen niedriger und hoher Flamme	Grösse einer Entladung
310	3	96
600	6	100
700	8	115
1000	12	120

Die wachsenden Zahlen der letzten Columnne zeigen, dass bei langsamen Schwingungen ein Theil der Flaschenladung durch Leitung verloren ging.

Mag aber der Electrisirungsvorgang in der Sonnenverbrennung selbst, in der Reibung der aus dem Weltraum ihr zuströmenden Materie oder in anderen noch unbekannten Ursachen zu suchen sein — die Möglichkeit der Existenz eines electrischen Sonnenpotentials ist durch die äquatoriale Ausbreitung von Verbrennungsproducten der Sonne im Weltraum gegeben.

Diese Möglichkeit erhebt sich aber zum Range grosser Wahrscheinlichkeit, wenn man die Leichtigkeit betrachtet, mit welcher sich schwierige, bisher noch ungelöste Probleme terrestrischer Naturerscheinungen mit Hülfe eines electrischen Sonnenpotentials lösen lassen. Hat die Sonne ein electrisches Potential, so muss sie vertheilend auf alle Himmelskörper, also auch auf die Erde wirken. Eine Ansammlung entgegengesetzter Electricität auf ihrer ganzen Oberfläche kann aber auch bei dieser nur stattfinden, wenn die frei werdende entgegengesetzte Electricität abgeleitet wird. Diese Ableitung ist ebenfalls nur denkbar durch Verbreitung im Weltraum. Es ist ungefähr derselbe Vorgang, wie er stattfindet, wenn einem geladenen kugelförmigen Conductor eine kleinere isolirte Kugel gegenüber gestellt wird. Die Kugel nimmt dann allmählich eine entgegengesetzte Ladung an, während die gleiche Electricität sich durch Zerstreuung im Raume verliert. Bei der Erde wird diese Zerstreuung der durch Sonnenvertheilung entstandenen sogenannten freien Electricität noch durch die grosse Verdünnung der höheren Luftschichten und die auf- und niedersteigenden, mit Feuchtigkeit beladenen Luftströme wesentlich begünstigt, da durch diese den höheren Schichten sehr verdünnter Luft die freie Electricität zugeführt wird. Dass in diesen verdünnten höheren Luftschichten electrische Strömungen vor sich gehen, beweisen die Nord- und Südlichter. Man könnte dieselben als den an der Grenze der Erdatmosphäre stattfindenden electrischen Ausgleich zwischen der von der Sonne mit negativer Ladung ausströmenden Materie und der freige wordenen positiven Influenzelectricität der Erde betrachten. Dieser Ausgleich wird immer dann auftreten müssen, wenn durch Aenderung des Sonnenpotentials auch das der Erde

geändert wird. Zur Herstellung des Gleichgewichtes muss dann positive oder negative Electricität von der Erde ausströmen, es muss also entweder ein Ausgleich mit der von der Sonne ausströmenden negativen Electricität an der Grenze der Atmosphäre stattfinden, oder es muss diese der Erde zufließen. Dass dieser Austausch vorzugsweise in den Polargegenden der Erde stattfindet, kann darin seinen Grund haben, dass die polare Luft stärker electricisch ist, da sie durch die äquatoriale Luftströmung in den oberen Regionen der Atmosphäre fortwährend durch diese stärker electricisirte Luft verdrängt wird, mithin in ihrer ganzen Masse die Electricität der höchsten Luftschichten niederer Breiten annehmen muss. Die mit den Nord- und Südlichtern in innigem Zusammenhang stehenden Erdströme sind dann als eine nothwendige Consequenz des vorzugsweise in den Polargegenden stattfindenden Ausgleiches der Intensitätsschwankungen der Sonnen- und Erdelectricität zu betrachten. Diese Ausgleichsströme müssen ihrerseits durch ihre electrodynamische Wirkung die Magnetnadel beeinflussen.

Es drängt sich hier aber die Frage auf, ob nicht der Erdmagnetismus selbst als eine electrodynamische Wirkung der electricischen Ladung der Erde aufzufassen ist. Nach der schönen Untersuchung, die Hr. Rowland im Helmholtz'schen Cabinet unter dessen Leitung angestellt hat<sup>1)</sup>, ist es als nachgewiesen zu betrachten, dass mechanisch fortbewegte stationäre Electricität electrodynamische Wirkungen in ähnlicher Weise ausübt, wie ein electricischer Strom. Danach muss die Erde, wenn ihre Oberfläche mit Electricität von grosser Dichtigkeit geladen ist, infolge ihrer Rotation in gleicher Weise magnetische Erscheinungen zeigen, wie wenn electricische Ströme sie umkreisten, die während der Zeit einer Umdrehung in jeder Breite ebenso viel Electricität um sie herumführten, wie die statische Electricität beträgt, die auf dem betreffenden Oberflächenringe sich befindet. Wie gross die Dichtigkeit der Electricität auf der Erdoberfläche sein müsste, um durch ihre Rotation den Erdmagnetismus hervor-

1) Rowland, Berl. Ber. 1876. p. 211—216.

zubringen, wird geübten Mathematikern nicht schwer fallen zu berechnen. Da das magnetische Moment eines Kreisstromes im Verhältniss der umströmten Fläche steht, so wird sich dieselbe voraussichtlich bei den grossen Dimensionen der Erde nicht als unzulässig gross herausstellen. Ferner wird bei den colossalen Dimensionen der Sonne, deren Oberfläche 11483 Erdoberflächen enthält, während die Entfernung der Sonne nur 22934 Erdhalbmesser beträgt, die Dichtigkeit der Sonnenelectricität nur etwa doppelt so gross, wie die der Erde zu sein brauchen, um diese durch electricische Vertheilung hervorzurufen. Wäre die Erdoberfläche ganz gleichmässig mit Electricität beladen, so müssten die magnetischen Pole mit den Rotationspolen der Erde zusammenfallen. Da dem nicht so ist, und da überhaupt grosse Unregelmässigkeiten in der Vertheilung des Erdmagnetismus auf der Erdoberfläche stattfinden, so muss die Vertheilung der ruhenden Electricität auf der Erdoberfläche eine unregelmässige sein. Es erscheint dies auch wahrscheinlich, wenn man bedenkt, dass circa  $\frac{1}{3}$  der Erdoberfläche aus Festland besteht, welches grossentheils Felsboden hat, der von schlecht leitendem Erdreich oft nur dünn bedeckt ist. Die Ansammlung der Influenzelectricität wird daher hier vorzugsweise auf der Oberfläche des glühenden, gut leitenden Erdinnern zu suchen sein, durch deren grösseren Abstand von der Erdoberfläche der überwiegende Einfluss der zunächst liegenden in convectiver Bewegung befindlichen Electricitätsmassen vermindert wird. Ob sich die bestehende Vertheilung des Erdmagnetismus, sowie die beobachteten periodischen und unregelmässigen Störungen desselben aus dieser Theorie über die Ursache der erdmagnetischen Erscheinung werden herleiten lassen, muss späterer eingehender Forschung anheimfallen. Die täglichen regelmässigen Störungen könnten darin ihre Erklärung finden, dass die Dichtigkeit der Influenzelectricität auf der der Sonne abgewendeten Seite etwas geringer sein muss, wie auf der ihr zugewendeten. Diese von der Stellung der Sonne abhängende ungleiche Dichtigkeit der Erdelectricität muss mit der Rotation der Erde fortschreiten, kann daher auch die Ursache der von Lamont erörterten

regelmässigen äquatorialen Erdströme sein. Ebenso können die magnetischen Störungen des Mondes in der Rückwirkung der Mondelectricität auf die Vertheilung der Influenzelectricität der Erde ihre Erklärung finden. Dagegen wird die säculare Aenderung der Lage der magnetischen Pole wohl nur auf kosmische, noch ganz unerkannte Ursachen zurückzuführen sein.

Mag diese Theorie aber auch noch vieles unerklärt lassen, so gewährt sie doch wenigstens die Möglichkeit, eine Erklärung für die Entstehung des Erdmagnetismus im Anschluss an unsere bisherigen Erfahrungen zu geben. Es ist dies bei keiner der bisherigen Theorien der Fall. Der Annahme eines Centralmagnets im Inneren der Erde widerspricht schon die allgemeine Erfahrung, dass die Glühhitze den Magnetismus aller Körper vernichtet. Ohne gänzlich von der Erfahrungsgrundlage abzusehen, kann man daher die Annahme eines Centralmagnets nicht aufrecht erhalten. Der Annahme einer Schicht magnetischer Erze in der Erdkruste als Sitz des Erdmagnetismus widerspricht einmal die Rechnung, da der Magnetismus einer solchen Schicht, auch wenn sie möglichst dick und zum Maximo magnetisirt angenommen wird, nicht ausreichen würde, um den vorhandenen Erdmagnetismus hervorzubringen; dann aber auch die Unmöglichkeit, einen Grund für die Entstehung der Magnetisirung dieser Erzschrift aufzufinden, da dieselbe doch nicht von Anfang an vorhanden gewesen sein kann, sondern erst nach der Erkaltung der Erde entstanden sein müsste. Dasselbe würde von der nach Faraday's Entdeckung der magnetischen Eigenschaften des Sauerstoffs der Luft aufgestellten Theorie, dass der Sauerstoff der Luft der Sitz des Erdmagnetismus wäre, geltend zu machen sein, wenn nicht die Rechnung schon ergäbe, dass der Sitz dieses Magnetismus sich nicht ausserhalb der Erdoberfläche befinden kann. Ebenso wenig können die aufgestellten Theorien des Erdmagnetismus, welche auf thermoelectrischen Strömen oder, wie Zöllner es versuchte, auf Convectionsströmen im flüssigen Erdinneren beruhen, Beachtung finden, da in einem nach allen Seiten gleich gut leitenden Medium solche Ströme gar nicht zur Erscheinung kommen können.



Uebrigens ist auch für die Existenz fortdauernder regelmässiger Strömungen des flüssigen Erdinneren gar keine Ursache aufzufinden.

In ähnlicher Weise, wie ein electricisches Sonnenpotential die Möglichkeit der Erklärung des Erdmagnetismus mit den ihm verwandten Erscheinungen der Nord- und Südlichter und der Erdströme gewährt, gibt es auch eine Handhabe für die Erklärung der Luftpolelectricität und der Gewittererscheinungen. Dass die Erde negativ electricisch geladen sein müsste, nahm schon Lamont an zur Erklärung der so wechselnden und unsteten Luftpolelectricität. Seine Ansicht, dass diese electricische Ladung durch thermoelectricische Differenzen zu erklären sei, ist aber ebenso wenig haltbar, wie die Ansicht, dass Reibungsvorgänge ein electricisches Erdpotential erzeugen könnten. Ein solches kann nur durch kosmische Influenz und Ableitung der frei werdenden gleichen Electricität durch Verbreitung im Raume oder Neutralisirung mit der entgegengesetzt geladenen Materie, die von der Sonne in der Richtung der Ebene des Sonnenäquators ausfliesst, entstehen. Nimmt man aber an, dass dies der Fall sei, dass mithin die Erde mit der Sonne einen electricischen Ansammlungsapparat bildet, dessen trennendes Dielectricum die Atmosphäre der Sonne und der Erde und der mit äusserst verdünnter Materie erfüllte interplanetare Raum ist, so sind alle von Lamont und anderen aus der electricischen Ladung der Erde gezogenen Schlussfolgerungen berechtigt. Zur Erklärung der Gewitterelectricität scheint aber doch die geringfügige und wechselnde atmosphärische Electricität, auf die sie bisher zurückgeführt wird, nicht ausreichend zu sein. Das plötzliche Auftreten so gewaltiger Massen Electricität, wie sie namentlich bei tropischen Gewittern zur Erscheinung kommen, weist die Annahme zurück, dass dieselbe ihren Sitz in der schwachen electricischen Ladung der verhältnissmässig geringen Luftmenge, die den Träger der Gewitterwolken bildet, gehabt habe. Es müssen ergiebiger Quellen sein, denen sie entstammt. Eine solche Quelle von unerschöpflicher Mächtigkeit findet sich in der electricischen Ladung der Erde durch Sonneninfluenz. Wenn man einer grossen



electricisch geladenen Kugel einen leitenden Gegenstand nähert, so unterliegt derselbe der vertheilenden Wirkung der auf der Oberfläche der Kugel befindlichen Electricität. Findet die in dem Theile des Leiters, welcher der Kugel am entferntesten ist, angesammelte gleichartige Electricität eine Ableitung nach benachbarten, noch weiter entfernten Leitern, so wird der erstere Leiter dauernd mit Electricität geladen, deren Polarität der der Kugel entgegengesetzt ist. Ist die Erhebung des Leiters über die Oberfläche aber nur gering im Verhältniss zum Durchmesser der Kugel, so kann auch die Spannungsdifferenz zwischen der Kugelfläche und dem entferntesten Punkte der Erhebung nur gering sein. Aus diesem Grunde kann auch bei einer grossen Dichtigkeit der Electricität auf der Erdoberfläche auf derselben doch keine electricische Abstossung stattfinden, und selbst auf Bergspitzen kann sie noch nicht sehr bemerklich sein. Anders aber gestaltet sich das Verhältniss, wenn eine Kugel durch Influenz einer entfernten electricischen Kugel geladen ist. Die nach der Faraday'schen Molecularvertheilungstheorie von der ladenden zur geladenen und abgeleiteten Kugel gehenden Kraftlinien treffen die letztere überall fast senkrecht und bei grossem Abstände der influenzirend aufeinander wirkenden Kugeln im Verhältniss zu den Durchmessern der Kugeln in nahe gleicher Anzahl auf der der vertheilenden Kugel zugewandten, wie der abgewandten Seite. Nähert man nun einen isolirten, leitenden Schirm, der einen Theil der Oberfläche der influenzirten Kugel bedeckt, der letzteren, so wird er bei geringer Dicke nicht merklich electricisch. Sobald man jedoch den Schirm ableitend berührt, nimmt er die der Kugel entgegengesetzte Electricität an, während die gleiche abgeleitet wird. Entgegengesetzt ist das Verhalten, wenn der Schirm mit der Kugel selbst leitend verbunden wird. Dann bildet der Schirm einen Theil der Kugeloberfläche und nimmt die electricische Ladung derselben an, wobei diese unter dem Schirm unelectricisch wird. Als solche Schirme treten nun auf der Erdoberfläche die Gewitterwolken auf. Denkt man sich einen solchen Wolkenschirm in der Bildung über einem Theile der Erdoberfläche begriffen, so wird derselbe unbe-

einflusst durch die Erdelectricität bleiben, solange die leitenden Wassertheilchen sich isolirt und in grösserem Abstände voneinander befinden. Nebel und leichte Wolken werden daher nicht electrisch werden. Sobald aber der Nebel sich so weit verdichtet hat, dass seine leitenden Theile in Berührung miteinander kommen, oder die Entfernung zwischen ihnen so klein wird, dass schon Electricität sehr geringer Spannung den Zwischenraum überspringen kann, so unterliegt die Wolke dem Vertheilungsvorgange. Dieser kann einmal dadurch eingeleitet werden, dass sie durch aufsteigende Wolkenwirbel bis in sehr hohe Regionen hinauf leitende Verbindung mit dort befindlichen Wolken erhält. Dann nimmt diese leitend zusammenhängende Wolke in ihren unteren Theilen die der Erdelectricität entgegengesetzte Electrification an, während die obere die ihr gleiche aufnimmt. Es kann eine dichte leitende Wolkenbank aber auch an einer oder mehreren Stellen mit der Erde selbst in leitende Verbindung kommen. Dann bildet sie einen Theil der leitenden Eroberfläche und nimmt die Electricität derselben an.<sup>1)</sup> Der

1) Bei einer Reise auf dem mittelländischen Meere hatte ich in der Nähe der spanischen Küste zwischen Carthagena und Almeria im Winter 1865 Gelegenheit, den Verlauf der Erscheinung einer Wasserhose zu beobachten, welcher mir entschieden für diese Auffassung zu sprechen scheint.

Zwischen dem Schiffe und der Küste in der Nähe von Almeria zeigte sich bei lebhaft bewegter, sogenannter todter See ohne wesentliche Luftbewegung eine schwarze, dichte, aber, wie es schien, nicht hohe Wolkenbank, unter welcher das Meer in wildester Bewegung zu sein schien. Es erschien dort als ein weisser, hoch aufschäumender, ziemlich runder Fleck, dessen Durchmesser die Seeleute auf 2 bis 3 Seemeilen schätzten, während seine Umgebung nur glatte Wellenzüge ohne alle Sturzwellen zeigte. Trotz der beträchtlichen Entfernung des Schiffes von der heftig bewegten Stelle, die mehrere Seemeilen betrug, konnte man doch deutlich durch das Fernrohr erkennen, dass die wilde Brandung der Meeresoberfläche sich mehrere Meter über die scharf abgegrenzte Oberfläche des relativ ruhigen Meeresspiegels erhob. Die Wolke senkte sich an einer Stelle trichterförmig nieder und bildete einen dem Rüssel eines Elephanten ähnlichen, gekrümmten Wolkenstreifen, der bis ziemlich nahe zu der schäumenden Meeresfläche hinabreichte und sich unten etwas verästelte. Eine vollständige Berührung mit der schäumigen Fläche war nicht zu erkennen, auch fand auffallender Weise unter dem Wolkenrüssel kein

letztere Vorgang wird am leichtesten eintreten am Abhänge steiler Berge, an die die Wolkenschichten sich anlehnen. Gebirge sind daher häufig Gewitterbildner. Bei der Entstehung der die Träger der Gewitterelectricität bildenden Wolken scheint die Electricität keine wesentliche Rolle zu spielen. Die Ursache der Wolkenbildung ist der Regel nach in der auf- und niedergehenden Luftbewegung zu suchen, welcher nicht nur diese und der den Wolken entfallende Regen, sondern auch die Entfesselung der Stürme fast ausschliesslich zuzuschreiben ist. Die hierüber in der Meteorologie vielfach noch herrschenden Anschauungen bedürfen meiner Ansicht nach in einigen Punkten der Berichtigung. Würde das Gleichgewicht des Luftmeeres nicht stets durch die ungleiche Erwärmung und Abkühlung der Luft durch die Strahlung gestört, so müssten Temperatur und Dichtig-

stärkeres Schäumen des Meeres, als an den übrigen Stellen statt. Der Rüssel selbst rotirte langsam, wenn ich mich recht erinnere, im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers über dem weissen Fleck, und zwar nahm auch seine Verbindungsstelle mit der Wolke an dieser Bewegung Theil, wenn auch nicht in gleichem Umfange. Leider entzog uns die einbrechende Nacht und die wachsende Entfernung nach etwa halbstündiger Beobachtung, während welcher der Rüssel etwa anderthalb Umdrehungen gemacht hatte, wobei seine Spitze sich constant auf etwa  $\frac{1}{2}$  des Radius des weissen Fleckes von dessen Rande erhielt, die weitere Betrachtung dieses interessanten Phänomens, welches mit mir mein Bruder William und seine Frau, sowie die zur Besatzung des französischen Kabelschiffes, auf welchem wir uns befanden, gehörigen Marineofficiere mit grösster Spannung verfolgten. Von einer Wirbelbewegung war bei demselben nichts zu bemerken. Es herrschte beinahe Windstille. Es konnte nur eine rein electricische Erscheinung sein, die in einer electricischen Strömung von der Erde zur Wolke bestehen musste. Nimmt man an, dass diese Strömung an einer Stelle so stark geworden war, dass sich hier durch electricische Fortführung der Flüssigkeit eine leitende Wasserstrasse zwischen Meer und Wolke bildete, so erklärt sich auch die Rotation des Rüssels unter dem Einflusse des Erdmagnetismus. Während der Nacht tobte an der spanischen Küste ein Gewitter, dessen Entstehung wir wahrscheinlich in der Trombe beobachtet hatten. Doch schien diese selbst ihren Lauf später von der spanischen nach der afrikanischen Küste gerichtet zu haben, denn gegen Ende der Nacht wurde unser Schiff nahe derselben von einem nur wenige Minuten andauernden, so furchtbaren Unwetter befallen, dass es dadurch in die grösste Gefahr gerieth, und die Seeleute der festen Ansicht waren, die Trombe sei über das Schiff fortgegangen.

keit der Atmosphäre bis zur grössten Höhe im sogenannten indifferenten Gleichgewicht sein, und zwar in der Weise, dass der Temperaturverlust bei zunehmender Höhe der Ausdehnungsarbeit des Gases überall äquivalent wäre. Die höhere Lufttemperatur der niederen Breiten würde sich durch langsam verlaufende Wirbel mit horizontaler Rotationsaxe, wie die Passatwinde sie in grossem Maassstabe darstellen, ausgleichen, und schliesslich würde das ganze Luftmeer in gleichen Höhen gleiche Temperatur haben. Dieses indifferente oder auch adiabatische Gleichgewicht wird nun durch vorzugsweise Erwärmung der Erdoberfläche und der unteren Luftschichten durch die Sonnenstrahlung, durch die Absorption derselben beim Durchgang durch die Atmosphäre und die vorzugsweise Abkühlung der höheren Schichten durch Ausstrahlung fortwährend gestört. Es werden dadurch die unteren Schichten leichter und die oberen schwerer, wie es das adiabatische Gleichgewicht bedingt, und diese Störung muss sich durch auf- und niedergehende Strömungen in der Atmosphäre ausgleichen. Da aufsteigende Luft, welche am Erdboden wärmer geworden ist, wie es der adiabatischen Temperaturcurve entspricht, diesen Wärmeüberschuss beim Emporsteigen beibehält, der Auftrieb aber mit der wachsenden Höhe des aufgehenden Luftstromes zunimmt, weil die am Erdboden nachströmenden Luftschichten immer denselben Temperaturüberschuss haben, so muss der Aufstrom an den Stellen, wo er einmal durch besonders günstige locale Verhältnisse entstanden ist, solange fort dauern, bis der Temperaturunterschied ausgeglichen ist. Die durch den Aufstrom der relativ leichteren Luft und den Niedergang der durch Strahlung abgekühlten, relativ schwereren an anderen Stellen geleistete Arbeit muss sich in lebendige Kraft umsetzen, indem sie die Luft in lebhaftere Bewegung versetzt. Es wird dies wesentlich durch die Volumenvergrösserung der aufsteigenden Luft durch Druckverminderung bewirkt. Da bei dem grossen Durchmesser der Erdkugel der Luftraum mit der Höhe nur unmerklich grösser wird, so muss die Geschwindigkeit der aufsteigenden Luft schon aus diesem Grunde nahe proportional der Druckverminderung zunehmen. In den

höch-  
strom  
ein  
digke  
drän-  
Dies  
statt  
hat  
Aufs  
ström  
wied  
da b  
sch  
resu  
ober  
Glei  
war  
tati  
mo  
Auf  
glei  
gew  
keit  
ist.  
Stü  
räu  
geh  
der  
fol  
au  
de  
rul  
Ve  
St  
Lu  
R  
W

höchsten Luftregionen, bis zu denen jeder sich bildende Aufstrom gelangen wird, muss daher die Luftgeschwindigkeit eine sehr bedeutende sein, und mit der gleichen Geschwindigkeit muss hier die umgebende ruhige Luft zur Seite gedrängt werden, um Platz für die angekommene zu schaffen. Diese Verdrängung wird namentlich nach der Richtung hin stattfinden, wo ein niedergehender Luftstrom sich gebildet hat zum Ersatz der auf der Erdoberfläche zur Stelle des Aufstromes nachströmenden überhitzten Luft. Diese niederströmende Luft verdichtet sich nun zwar beim Niedergange wieder der jeweiligen Höhe entsprechend, sie behält aber dabei die in den oberen Regionen erhaltene Geschwindigkeit bei. Es ist ersichtlich, dass das Endresultat eine sehr grosse Luftgeschwindigkeit auf der Erdoberfläche sein kann, wenn die Störung des adiabatischen Gleichgewichtes eine qualitativ und quantitativ beträchtliche war. Diese localen Stürme, deren Richtung durch die Rotation der Erde nach dem Dove'schen Drehungsgesetze modificirt wird, müssen besonders heftig werden, wenn der Aufstrom selbst ein engbegrenzter ist, da dann der Ausgleichungsprocess, d. i. die Umwandlung der in der Gleichgewichtsstörung angesammelten Energie in Luftgeschwindigkeit, auf eine verhältnissmässig geringe Luftmenge beschränkt ist. Doch auch starke, über ganze Continente fortgehende Stürme können durch aufsteigende Luftströme von grosser räumlicher Ausdehnung erzeugt werden. Dass der niedergehende Luftstrom eine Druckvermehrung auf dem Erdboden, der aufgehende eine Verminderung des Luftdruckes bedingt, folgt aus den mechanischen Bewegungsgesetzen. Doch muss auch schon die Bewegung der Luft an sich stets ein Sinken des Barometerstandes verursachen, da die bewegte Luft die ruhende an der Berührungsgrenze mit fortreisst, mithin eine Verdünnung der ruhenden bewirkt. Das Endresultat des Störungsausgleichs wird daher ein Ueberführen immergrösserer Luftmassen in wirbelnde Bewegung und schliesslich eine Rückbildung der lebendigen Kraft durch Reibung in Wärme sein.

Es folgt aus dieser Betrachtung, dass der Wasserdampf

in der Luft nicht die grosse Rolle bei der Luftbewegung spielt, die ihm gewöhnlich beigelegt wird, da sich Luftbewegungs- und Luftdruckerscheinungen auch ohne den Wassergehalt der Luft erklären lassen. Man muss nur den Sitz der Stürme, d. i. hier den Ort der Beschleunigung der Luftmassen, nicht an der Erdoberfläche, sondern wesentlich in den höchsten Luftregionen suchen. Bestände die Atmosphäre nur aus Wasserdampf, so würden die Erscheinungen ganz ähnliche sein. Der Wasserdampf unterliegt dem adiabatischen Ausdehnungsgesetze ebenso, wie die Luft, nur vermindern sich bei ihm Dichtigkeit und Temperatur mit wachsender Höhe weit weniger, als bei den permanenten Gasen der Atmosphäre. Nach Ritter würde eine Dampfatmosphäre ca. dreizehnmal höher sein, als eine Luftatmosphäre. Es findet zwar nach Clausius und Sir William Thomson bei der adiabatischen Ausdehnung des Dampfes eine fortwährende Condensation statt, doch muss dieselbe in den Höhen, in denen erfahrungsmässig die Wolkenbildung eintritt, noch zu gering sein, um die beobachteten Niederschläge hervorzubringen. Der Grund der bei aufgehenden Luftströmen eintretenden Condensation liegt wesentlich darin, dass der Wasserdampf mit der Luft innig gemischt ist und dass derselbe im aufgehenden Strome nicht die ihm zukommende adiabatische Temperatur annimmt, sondern die der weit überwiegenden Luftmasse, mit welcher er gemischt ist. Da die Luft sich nun mit steigender Höhe weit schneller abkühlt, wie der Dampf, so wird dieser unter die ihm angehörige adiabatische Temperatur abgekühlt, und diese Temperaturverminderung verursacht seine Condensation, wenn der Sättigungspunkt des Dampfes überschritten wird.

Gegen diese Auffassung spricht scheinbar der Umstand, dass durch Luftfahrer wiederholt constatirt ist, dass Schichten wärmerer Luft häufig über kälteren gelagert sind, während das adiabatische Ausdehnungsgesetz eine stetige Abnahme des Druckes und der Temperatur verlangt. Es erklärt sich dies aber leicht durch die ungleiche Beschaffenheit der Erdoberfläche, welche bedingt, dass der aufsteigende Luftstrom zu manchen Zeiten und an manchen Orten eine viel höhere



Temperatur und einen weit grösseren Wasserdampfgehalt hat, als an anderen Orten. Ist der Wassergehalt einer solchen heissen aufsteigenden Luftmasse so gross, dass das Wasser zum Theil während des Aufganges ausgeschieden wird und als Regen niederfällt, so wird die in den oberen Schichten der Atmosphäre eingetroffene Luft durch die von ihr aufgenommene latente Wärme des Wasserdampfes noch weiter erwärmt und dadurch ihr Volumen und Auftrieb vergrössert, und das Endresultat muss eine relativ warme, verhältnissmässig wasserarme Luftschicht sein, die dann durch Ausdehnungsströmung über kältere, aber mehr Wasserdampf enthaltende und dadurch leichtere fortgeschoben wird.<sup>1)</sup> Es sind dies leicht erklärliche Abweichungen von der Regel, dass Temperatur und Dichtigkeit der Atmosphäre mit steigender Höhe abnehmen, der Wassergehalt dagegen zunehmen muss. Letzteres muss wenigstens für höhere Breiten die Regel sein, da die in den Calmen continuirlich aufsteigenden warmen Luftmassen mit relativ grossem Wassergehalte zwar zum grossen Theile auf ihrem Wege zu höheren Breiten nach Verlust ihrer grösseren Wärme durch Ausstrahlung als niedergehende Ströme wieder zum Erdboden niedersinken, zum Theil jedoch als oberer Aequatorialstrom auch die hohen Breiten erreichen müssen. In diesem grösseren Wassergehalte der höheren Schichten der Atmosphäre ist der Grund zu suchen, warum auch bei niedergehenden Luftströmen Regenfälle eintreten können. Ist die Temperatur einer sehr wasserhaltigen oberen Strömung durch Strahlung bis unter den Sättigungspunkt des Dampfes abgeköhlt, so bilden sich die Cirruswolken, die wahrscheinlich aus Eisnadeln bestehen.<sup>2)</sup> Die dadurch frei werdende latente Dampf-

1) Krönig hat bereits den Nachweis geführt, dass der mit einem aufsteigenden Strome gemischte Wasserdampf durch seine Condensation keine Volumenverminderung, sondern eine Volumenvergrösserung herbeiführt, da die latente Wärme des Dampfes das Volumen der Luft weit mehr vergrössert, als das Volumen des condensirten Dampfes beträgt. Fortschr. d. Phys. 20. p. 626.

2) Es ist jedoch höchst wahrscheinlich, dass sowohl Wasser wie Dampf in den hohen Luftregionen ihren Aggregatzustand bis weit unter die Temperatur ihres Gefrier-, resp. Condensationspunktes beibehalten.



und Wasserwärme wird diese Luftschichten wieder erwärmen und den Process der Bildung schwererer Schneewolken längere Zeit hinausziehen, ist er aber durch fortdauernden Wärmeverlust durch Ausstrahlung vollendet, so muss das Gewicht des keinen in Betracht kommenden Raum mehr ausfüllenden Eises das adiabatische Gleichgewicht stören, und ein Niedersinken der Wolkenmasse eintreten. Bei der dabei eintretenden Verdichtung und Erwärmung wird der Schnee wieder geschmolzen und die dazu nöthige latente Wärme der Luft entzogen. Das adiabatische Gleichgewicht wird daher progressiv in noch höherem Maasse gestört, und das Endresultat wird ein kalter niedergehender Luftstrom mit Regen sein. Die Dichtigkeit dieser langsam niedersinkenden Regenwolken wird aber nicht gross genug sein, um die Wolke electricisch leitend zu machen, es wird mithin keine Electricitätsbildung durch Vertheilung eintreten. Anders aber wird sich der Verlauf gestalten, wenn durch locale Ueberhitzung der dem Erdboden benachbarten Luftschichten ein localer Aufstrom mit Regenfall entsteht. Dann kann der Aufstrom eine Geschwindigkeit annehmen, die grösser ist, als die Fallgeschwindigkeit der gebildeten Wassertropfen in der widerstehenden Luft; diese werden daher in die höheren Regionen, deren Temperatur weit unter dem Eispunkte liegt, mit in die Höhe gewirbelt und werden zu Hagelkörnern gefrieren. Durch die schnelle Volumenvergrösserung und die

Dass das Wasser ohne Gegenwart von die Krystallisation einleitenden festen Körpern und ohne heftige Erschütterungen bis weit unter  $-20^{\circ}$  abgekühlt werden kann, ohne zu gefrieren, steht fest. Dass Dampf in gleicher Weise die Dampfform unter seinem Condensationspunkte noch beibehalten kann, steht experimentell noch nicht fest. Wir kennen nur die Verzögerung des Siedepunktes, die so häufig zu Dampfkesslexplosionen Veranlassung gibt. Es ist jedenfalls nicht unwahrscheinlich, dass dieser Verzögerung des Siedens auch eine Verzögerung der Condensation gegenübersteht. Durch Versuche lässt sich dies nur schwer constatiren, da die Mittel fehlen, eine Dampfmasse ausser Berührung mit festen oder flüssigen Körpern abzukühlen. Es ist ohne diese Annahme nicht gut zu erklären, warum der Himmel nicht immer ganz mit Cirruswolken bedeckt ist — es müsste denn angenommen werden, dass flüssig gewordene Wassertheilchen in der grossen Verdünnung der höheren Luftschichten nicht als Wolken erscheinen.

ihr entsprechende seitliche Ausbreitung des beschleunigten Luftstromes werden die benachbarten relativ feuchten und kalten höheren Luftschichten in Wirbel mit horizontaler Drehaxe versetzt, die sich mit dem um eine senkrechte Axe rotirenden aufsteigenden Wirbel combiniren. Die heftige Wirbelbewegung, in welche das bisher ruhige, überkühlte Luftmeer hierdurch versetzt wird, wird in demselben nun eine plötzliche Wasser- und Eisbildung herbeiführen. Die Wirbel mit horizontaler Drehaxe können dabei einen grossen Durchmesser annehmen und die Eiskörner wiederholt in die Eisregion hinaufschleudern, bis sie zu schwer geworden sind und als Hagelkörner oder nach Durchlaufung tieferer warmer Luftschichten als kalte Regentropfen zu Boden fallen. Durch diese in kurzer Zeit eintretende starke Regenbildung werden die Wassertheile der Wolkenstrasse bis zu den höchsten Luftschichten hin nun so dicht aneinander geführt, dass sie ein Leiter der Electricität wird, mithin auch der electricischen Vertheilung unterworfen ist. Ist sie an irgend einer Stelle in leitender Verbindung mit der Erde, so muss die Erdelectricität in sie einströmen, und sie erhält dann die gleiche Electricität; ist sie es nicht, so wird sie in der Nähe der Erde ihr entgegengesetzt geladen, während die gleiche Electricität durch die leitende Wirbelwolke in die höheren Regionen entweicht. Wo die Leitung der Wolke unvollständig ist, wird sie durch Blitze, welche zwischen den von einander isolirten Wolkenschichten oder zwischen Wolke und Erde überspringen, vorübergehend hergestellt, und schliesslich wird beim Vorübergehen des Wirbelsturmes und der Auflösung der durch ihn gebildeten Wolke die ganze Electricität durch Blitze sich mit der Erdelectricität wieder ausgleichen oder zum Theil zur Luft als Luftpolelectricität übergehen.

Manche Beobachtungen von Gewitterbildung sind von hohen Bergspitzen oder vom Luftballon aus gemacht, welche fast alle von mehrfachen Wolkenschichten übereinander sprachen, die in Verbindung miteinander standen, oder zwischen denen Blitze übersprangen. Die lehrreichste Beschreibung ist die des Hrn. Wite<sup>1)</sup>, der von einem Luftballon

1) Wite, Fortschr. d. Phys. 1852. p. 762.

aus die Entstehung eines starken Gewitters beobachtete. „Er sah zwei Wolkenschichten etwa 2000 Fuss übereinander, von denen die obere Schnee, Regen und Hagel der unteren zusandte. Zwischen beiden bewegten sich geräuschlos gelbliche wellenähnliche Lichtmassen. Electriche Entladungen mit Blitz und Donner ereigneten sich immer in der unteren Schicht, doch war das Gewitter über beiden Schichten weit stärker, als unter denselben. Die obere Schicht war durch Westwind in starker Bewegung.“ Dass der Beobachter nur zwei über einander befindliche Wolken beobachten konnte, ist erklärlich, da sein Ballon sich in der Höhe des Zwischenraumes beider befand. Es ist anzunehmen, dass noch mehrere solcher Wolkenschichten bis zu den höchsten Luftregionen hinauf vorhanden gewesen sind, zwischen denen der beobachtete Niederschlag und der electriche Leitungsvorgang stattfand. Durch den namentlich aus der Mitte der oberen Wolkenschicht niederströmenden starken Regen wurden die Wolkenschichten leitend miteinander verbunden und unterlagen dadurch dem electriche Leitungsvorgange.

Es könnte der Theorie des electriche Sonnenpotentials noch der Einwand entgegengestellt werden, dass die electriche Anziehung zwischen der Sonne und den Planeten und die Abstossung, welche letztere auf einander und auf ihre Trabanten ausüben müssten, die Grundlage der astronomischen Rechnungen modificiren würde, da neben der Gravitation dann noch eine weitere Kraft, die electriche, in Rechnung zu ziehen sei.

Dieser Einwand ist vollkommen berechtigt. Da aber die electriche Kraft ebenso, wie die Gravitation, im Verhältniss der Quadrate des Abstandes der Mittelpunkte steht, so würden die Bahnen der Planeten unverändert bleiben, wenn ein Theil der Gravitationsanziehung durch eine electriche ersetzt wird. Nur das berechnete Verhältniss der Massen der Sonne und der Planeten zu der der Erde würde sich ändern. Diese Aenderungen müssten namentlich bei den kleinen Planeten und den Trabanten bemerklich werden, da die electriche Kraft eine Oberflächenfunction ist. Da-

gegen müssen die störenden Einflüsse, welche die Planeten und deren Trabanten gegenseitig auf ihre Bahnen ausüben, sich ändern, wenn die Gravitation durch electricische Abstossung vermindert wird.

Vielleicht ist es der Astronomie vorbehalten, aus den Störungen der Bahnen des Merkurs, der Asteroiden und der Trabanten den Beweis der Existenz oder Nichtexistenz eines electricischen Sonnenpotentials zu führen.

Ich bin nach Lesung dieser Abhandlung von befreundeter Seite darauf aufmerksam gemacht worden, dass ich versäumt habe, auf den merkwürdigen Zusammenhang der Sonnenfleckenperiode mit der der magnetischen Störungen der Erdströme und der Nord- und Südlichter näher einzugehen. In der That bildet dieser Zusammenhang einen gewichtigen Beweis der Existenz des electricischen Sonnenpotentials. Sind die Sonnenflecken, wie ich auseinandergesetzt habe, als zum Sonnenkörper zurückkehrende Strömungen der in der leuchtenden Sonnenatmosphäre verbrannten Sonnenbestandtheile anzusehen, die deswegen in mittleren Sonnenbreiten als Sonnenflecken sichtbar werden, weil dort die Bedingungen für die Wirbelbildung vorhanden sind, so muss die Zahl der Sonnenflecken auch ein Maass der Grösse der Verbrennungsthätigkeit sein. Die zehn- bis elfjährige Periode der Sonnenflecke würde demnach besagen, dass die Verbrennungsthätigkeit der Sonne alle zehn bis elf Jahre eine Steigerung erführe, die darauf allmählich auf ihr früheres Maass zurückginge. Da mit der Steigerung der Verbrennungsthätigkeit auch ein verstärkter Abfluss electricisirter Materie von der Sonne und dadurch indirect eine Vergrösserung des electricischen Sonnenpotentials eintreten müsste, so ist der Zusammenhang der Sonnenflecke mit der Erscheinung der Nord- und Südlichter, der Erdströme und der magnetischen Störungen gegeben. Der Grund dieser zehn- bis elfjährigen Sonnenfleckenperiode lässt sich nur in Strömungen oder partiellen Revolutionen des gasförmigen Sonnenkörpers selbst suchen. In der That müssen solche Revolutionen mit Nothwendigkeit von Zeit zu Zeit eintreten, da durch Wärme- und

Lichtstrahlung die oberen Schichten des Sonnenkörpers abgekühlt werden. Diese Abkühlung wird durch die niedergehenden Strömungen der Verbrennungsproducte vermittelt, welche bis zu einer beträchtlichen Tiefe in die noch dissociirte Gasmasse der Sonne eindringen und durch Mischung mit dieser den durch Dissociation erlittenen Wärmeverlust zum Theil wieder ersetzen. Die Folge wird sein, dass die äusseren Sonnenschichten unter die ihnen zukommende adiabatische Temperatur abgekühlt werden, dass also aus dem indifferenten ein labiles Gleichgewicht entsteht, welches sich längere Zeit in ähnlicher Weise erhalten kann, wie überhitzte Luft über Erdstrecken, die durch Sonnenstrahlung stark erwärmt sind. Hat diese Störung des adiabatischen Gleichgewichtes aber eine gewisse Grenze überschritten, so muss ein Umschwung in der Sonnenmasse eintreten. Die relativ kälter gewordenen äusseren Sonnenschichten müssen in die Sonnentiefe hinabsinken und die relativ heisseren, und leichteren tieferen Schichten müssen ihre Stelle einnehmen. Erfahrungsmässig findet ein solcher Umschwung alle zehn bis elf Jahre statt. Mit ihm gelangt wieder unabgekühlte heissere Sonnenmasse zur Verbrennung; diese wird mithin verstärkt, was eine Vermehrung der sichtbaren wirbelnden Rückströmungen, der Sonnenflecke, und indirect Schwankungen in der Grösse des electricischen Sonnenpotentials zur Folge hat.

Ich muss schliesslich noch bemerken, dass viele der in meiner Abhandlung enthaltenen Anschauungen bereits anderweitig publicirt sind und von mir nicht als die meinigen beansprucht werden. Ich nenne hier namentlich die Schriften von Ritter über die Constitution gasförmiger Weltkörper und das Buch von Reye über Wirbelstürme. Es war mir aber unmöglich, in dem beschränkten Raume dieser Mittheilung die Autorschaft jedes von mir benutzten Gedankens auf seine Urquelle zurückzuführen.

**X. Untersuchungen über die Constitution  
gasförmiger Weltkörper;  
von A. Ritter in Aachen.**

Sechszehnte Abtheilung.

§ 64. Wärmeausstrahlung einer adiabatischen Gaskugel.

Der adiabatischen Zustandslinie einer idealen Gaskugel entspricht ein Wachsen der Temperatur mit zunehmender Tiefe unter der Oberfläche, und in unmittelbarer Nähe der letzteren kann (nach § 12) die der Tiefenzunahme  $dz$  entsprechende Temperaturzunahme  $dT$  berechnet werden aus der Gleichung:

$$(597) \quad \frac{dT}{dz} = \frac{T_0}{\alpha r},$$

in welcher  $r$  den Halbmesser der Gaskugel,  $T_0$  die Mittelpunkttemperatur derselben und  $\alpha$  eine von dem Werthe der Verhältnisszahl  $k = c_p/c_v$  abhängige Constante bedeutet. Die letztere kann, wie in § 31 (Fig. 7) gezeigt wurde, durch die von der Gravitationscurve begrenzte Fläche  $F$  geometrisch dargestellt werden. Für  $k = 1,41$  nimmt (nach § 12 und § 31) diese Constante den Werth  $\alpha = 2,4$  an, und allgemein kann dieselbe berechnet werden mittelst der empirischen Annäherungsformel:

$$(598) \quad \alpha = 0,5 + \frac{0,4}{k-1,2}.$$

Für kleine Werthe der Verhältnisszahl  $z/r$  kann also die Temperatur in der Tiefe  $z$  unter der Oberfläche berechnet werden aus der Gleichung:

$$(599) \quad \frac{T}{T_0} = \frac{z}{\alpha r},$$

und da bei adiabatischer Zustandslinie die Temperaturen sich verhalten wie die  $(k-1)$ -ten Potenzen der Dichtigkeiten (Gleichung 309), so ergibt sich hieraus für das Verhältniss der zugehörigen Dichtigkeiten der Werth:

$$(600) \quad \frac{\gamma}{\gamma_0} = \left( \frac{z}{\alpha r} \right)^{\left( \frac{1}{k-1} \right)}.$$

Die Masse der Oberflächenschicht von der Dicke  $z$  hat pro Flächeneinheit der Oberfläche die Grösse:

$$(601) \quad \mu = \int_0^z \gamma dz,$$

und wenn man nach Substitution des aus der vorhergehenden Gleichung für  $\gamma$  zu entnehmenden Ausdruckes die ange-deutete Integration ausführt, so erhält man für die Massen-stärke dieser Oberflächenschicht den Werth:

$$(602) \quad \mu = \left(\frac{k-1}{k}\right) \gamma_0 (\alpha r)^{-\left(\frac{1}{k-1}\right)} z^{\left(\frac{k}{k-1}\right)}.$$

Die obigen Gleichungen gelten nicht nur für den gege-benen, sondern auch für jeden beliebigen anderen adiabati-schen Gleichgewichtszustand, in welchen man sich die Gas-kugel übergeführt denken kann, und bei gegebenem Werthe der Grösse  $\mu$  wird man für die Dicke einer Oberflächen-schicht von dieser Massenstärke einen um so kleineren Werth erhalten, je grösser die Dichtigkeit der Gaskugel an-genommen wird. Wenn der Halbmesser bis auf die Grösse  $r/n$  abnähme, so würde die Mittelpunktsdichtigkeit den Werth  $n^3 \gamma_0$ , und die Mittelpunktstemperatur (nach § 8) den Werth  $n T_0$  annehmen. Bei diesem neuen adiabatischen Gleichgewichtszustande würde also für die Oberflächenschicht diejenige Tiefe  $z_1$ , bei welcher die Massenstärke derselben wiederum den Werth  $\mu$  annehmen würde, zu berechnen sein aus der Gleichung:

$$(603) \quad \mu = \left(\frac{k-1}{k}\right) n^3 \gamma_0 \left(\frac{\alpha r}{n}\right)^{-\left(\frac{1}{k-1}\right)} z_1^{\left(\frac{k}{k-1}\right)}.$$

Durch Gleichsetzung der obigen beiden für die Grösse  $\mu$  gefundenen Ausdrücke erhält man für das Verhältniss der beiden Grössen  $z_1$  und  $z$  den Werth:

$$(604) \quad \frac{z_1}{z} = n^{\left(\frac{2-3k}{k}\right)}.$$

Die dem Werthe  $z_1$  entsprechende Temperatur  $T_1$  kann man nach Gleichung (599) berechnen, indem man dieselbe auf den neuen Gleichgewichtszustand anwendet; man erhält dann die Gleichung:



(605)

$$\frac{T_1}{n T_0} = \frac{z_1}{a \left( \frac{r}{n} \right)}.$$

Das Verhältniss der beiden Temperaturen  $T_1$  und  $T$  hat also die Grösse:

(606)

$$\frac{T_1}{T} = n^2 \cdot \frac{z_1}{z},$$

und nach Substitution des oben für das Tiefenverhältniss  $z_1/z$  gefundenen Ausdruckes erhält man für das Verhältniss dieser beiden Temperaturen den Werth:

(607)

$$\frac{T_1}{T} = n^{\left( \frac{2-k}{k} \right)}.$$

Da das Gesetz, nach welchem die Temperatur und die Dichtigkeit mit wachsender Tiefe unter der Oberfläche zunehmen, während des Ueberganges in den neuen Gleichgewichtszustand unverändert blieb, so gibt der hier für das Verhältniss der beiden Maximaltemperaturen  $T_1$  und  $T$  gefundene Werth zugleich an, in welchem Verhältniss die mittlere Temperatur der Oberflächenschicht von der Massenstärke  $\mu$  während des Ueberganges der Gaskugel in den dichteren heisseren Zustand zugenommen hat.

Unter Voraussetzung einer hinreichend grossen Dichtigkeit der Gaskugel darf man annehmen, dass die Dicke derjenigen Oberflächenschicht, von deren Massentheilen Wärmestrahlen direct in den leeren Raum ausgesendet werden, einen verhältnissmässig kleinen Bruchtheil vom ganzen Halbmesser der Gaskugel bildet. Wenn man ferner, unter Vorbehalt einer später auszuführenden Correction, die provisoische Annahme macht, dass die Massenstärke dieser Wärme ausstrahlenden Oberflächenschicht unabhängig ist von der mittleren Temperatur derselben, und dass diese Massenstärke für alle Zustände der Gaskugel eine und dieselbe Grösse  $\mu$  besitzt, so kann der obige Zahlenwerth zugleich gedeutet werden als das Verhältniss, in welchem die mittlere Temperatur der Wärme ausstrahlenden Oberflächenschicht während der Verdichtung zugenommen hat, oder, kürzer ausgedrückt, als das Verhältniss, in welchem die Oberflächentemperatur der Gaskugel zugenommen hat.

Nach Stefan's Untersuchungen verhalten sich die Intensitäten der Wärmeausstrahlungen annäherungsweise wie die vierten Potenzen der (absoluten) Oberflächentemperaturen.<sup>1)</sup> Hiernach ergibt sich für das Verhältniss der pro Flächeneinheit der Oberfläche ausgestrahlten Wärmequantitäten der Werth:

$$(608) \quad \frac{q_1}{q} = \left(\frac{T_1}{T}\right)^4 = n^{\left(\frac{8-4k}{k}\right)},$$

und da die Oberflächen sich verhalten wie die Quadrate der Halbmesser, so hat das Verhältniss der ganzen pro Zeiteinheit ausgestrahlten Wärmequantitäten die Grösse:

$$(609) \quad \frac{Q_1}{Q} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{q_1}{q} = n^{\left(\frac{8-6k}{k}\right)}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass  $Q_1 = Q$  wird, wenn  $k = \frac{4}{3}$  ist, und dass immer  $Q_1$  kleiner als  $Q$  ist, wenn  $k$  grösser als  $\frac{4}{3}$  ist. Da der adiabatische Gleichgewichtszustand einer Gaskugel, wie in § 33 gezeigt wurde, auf die Dauer überhaupt nur dann bestehen kann, wenn  $k$  grösser als  $\frac{4}{3}$  ist, so kommt hier nur dieser letztere Fall in Betracht. Für eine ideale Wasserstoffkugel würde  $k = 1,41$  zu setzen sein, und für diesen Fall ergeben sich die folgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe:

$n = 1$	2	10	100
$T_1/T = 1$	1,336	2,621	6,868
$q_1/q = 1$	3,2	47	2226
$Q_1/Q = 1$	0,8	0,47	0,22

Wenn man ein anderes mal  $k = \frac{5}{3}$  setzt, so erhält man die folgenden Werthe:

$n = 1$	2	10	100
$T_1/T = 1$	1,15	1,585	2,512
$q_1/q = 1$	1,74	6,3	39,8
$Q_1/Q = 1$	0,436	0,063	0,00398

Diese Zahlenwerthe entsprechen der ungenauen Voraussetzung: dass die Massenstärke der Wärme ausstrahlenden Oberflächenschicht während des Ueberganges der Gaskugel in den heisseren dichteren Zustand unverändert blieb. Da

1) Stefan, Wien. Ber. 20. März 1879.

das Absorptionsvermögen einer Gasschicht höchst wahrscheinlich mit wachsender Temperatur zunimmt, so hätten in Berücksichtigung dieses Umstandes bei dem heisseren dichteren Zustande der Gaskugel für die Massenstärke — und demgemäss auch für die mittlere Temperatur — der ausstrahlenden Oberflächenschicht kleinere Werthe als die oben angenommenen in Rechnung gebracht werden müssen. In Wirklichkeit wird daher die bei allmählich fortschreitender Verdichtung der Gaskugel stattfindende Abnahme der pro Zeiteinheit ausgestrahlten Wärmequantität noch rascher erfolgen, als oben gefunden wurde.

Da man annehmen darf, dass mit der Quantität der ausgestrahlten Wärme zugleich die Quantität des ausgesendeten Lichtes abnehmen wird, so folgt hieraus, dass mit dem Wachsen der inneren Wärme und der Oberflächentemperatur eines Fixsterns eine Abnahme seiner Lichtstärke verbunden sein kann. Die Lichtabnahme setzt also keineswegs eine bereits eingetretene Temperaturabnahme als nothwendige Vorbedingung voraus. Eine Abnahme der Lichtstärke eines Fixsterns kann vielmehr schon stattfinden, während die innere Wärme und die Oberflächentemperatur desselben noch im Zunehmen begriffen sind.

Die Sonne befindet sich gegenwärtig in einem Zustande, bei welchem die Frage: ob die mittlere Temperatur derselben noch im Zunehmen oder bereits im Abnehmen begriffen ist, einstweilen noch der Beantwortung sich entzieht. Jedenfalls aber hat die Sonne bereits einen Dichtigkeitszustand erreicht, bei welchem das Erfülltsein der oben gemachten Voraussetzung einer verhältnissmässig geringen Tiefe der ausstrahlenden Oberflächenschicht kaum angezweifelt werden kann. Aus den Resultaten der obigen Untersuchung darf daher mit grosser Wahrscheinlichkeit gefolgert werden, dass unter allen Umständen — mag die Temperatur der Sonne gegenwärtig noch im Zunehmen oder bereits im Abnehmen begriffen sein — die gesammte jährlich von der Sonne ausgestrahlte Wärmequantität gegenwärtig schon im Abnehmen begriffen ist, dass also die Sonne als ein im allmählichen Verschwinden begriffener Fixstern zu be-

trachten ist, oder als ein Fixstern, welcher bereits in das das Stadium der abnehmenden Lichtstärke eingetreten ist.

Die Untersuchungen des § 11 mussten zu dem entgegengesetzten Resultate führen, weil dort die Voraussetzung gemacht wurde, dass bei dem Wachsen der inneren Wärme eines gasförmigen Weltkörpers die Ausstrahlungstemperatur desselben — oder die mittlere Temperatur derjenigen Massentheile, von denen Wärmestrahlen direct in den leeren Raum ausgesendet werden — in demselben Verhältniss zunimmt wie die mittlere Temperatur des ganzen Weltkörpers. Die vorstehende Untersuchung zeigt, dass jene Annahme und die aus derselben gezogenen Schlussfolgerungen, soweit dieselben die Sonne betreffen, bei dem gegenwärtigen Dichtigkeitszustande derselben als unzulässig erachtet werden müssen.

§ 65. Hypothesen über das Contractionsgesetz der Sonne.

Das Potential einer im adiabatischen Gleichgewichtszustande befindlichen idealen Gaskugel von der Masse  $S$  kann (nach § 32) berechnet werden aus der Gleichung:

$$(610) \quad \mathfrak{A} = \left( \frac{3k-3}{5k-6} \right) N r S,$$

in welcher  $N$  die Gravitationskraft pro Masseneinheit an der Oberfläche der Gaskugel bedeutet; und das mechanische Aequivalent ihrer inneren Wärme hat (nach § 20) die Grösse:

$$(611) \quad U = \frac{\mathfrak{A}}{3k-3}.$$

Das Potential  $\mathfrak{A}$  kann aufgefasst werden als die mechanische Arbeit, welche die Gravitationskräfte verrichten würden, wenn der Halbmesser von der Grösse  $\infty$  bis auf die Grösse  $r$  abnähme. Diese mechanische Arbeit kann man sich in die beiden Theile  $U$  und  $\mathfrak{A} - U$  zerlegt denken, von denen der erstere zur Erzeugung der inneren Wärme, und der andere zur Erzeugung derjenigen Wärmequantität verwendet wurde, welche während der Contraction nach aussen abgegeben wurde. Die letztere Wärmequantität hat also die Grösse:

$$(612) \quad W = A(\mathfrak{A} - U) = A \left( \frac{3k-4}{3k-3} \right) \mathfrak{A}, \text{ oder:}$$

$$(613) \quad W = \left( \frac{3k-4}{5k-6} \right) A N r S.$$

Wenn  $N = N_0$  der Werth ist, welcher dem Werthe  $r = r_0$  entspricht, so ist nach dem Gravitationsgesetze:

$$(614) \quad Nr^2 = N_0 r_0^2$$

zu setzen, und nach Substitution des hieraus für  $N$  zu entnehmenden Werthes nimmt die obige Gleichung die folgende Form an:

$$(615) \quad W = \left( \frac{3k-4}{5k-6} \right) \frac{A N_0 r_0^2 S}{r}.$$

Indem man diese Gleichung nach der Zeit  $t$  differenziert, erhält man für die von der ganzen Gaskugel in jeder Zeiteinheit nach aussen abgegebene Wärmequantität den Werth:

$$(616) \quad \frac{dW}{dt} = - \left( \frac{3k-4}{5k-6} \right) \frac{A N_0 r_0^2 S}{r^2} \cdot \frac{dr}{dt}.$$

Die durchschnittlich von jedem einzelnen Massenkilogramm pro Zeiteinheit abgegebene Wärmequantität hat also die Grösse:

$$(617) \quad w = - \left( \frac{3k-4}{5k-6} \right) \frac{A N_0 r_0^2}{r^2} \cdot \frac{dr}{dt}.$$

Wenn mit  $\sigma$  die Grösse bezeichnet wird, um welche der Halbmesser pro Zeiteinheit, z. B. während eines Jahres, abnimmt, so ist:

$$(618) \quad \sigma = - \frac{dr}{dt}$$

zu setzen, und nach Substitution dieses Ausdrucks erhält man aus der obigen Gleichung die Werthe:

$$(619) \quad \sigma = \left( \frac{5k-6}{3k-4} \right) \frac{w r^2}{A N_0 r_0^2}, \quad (620) \quad \sigma_0 = \left( \frac{5k-6}{3k-4} \right) \frac{w_0}{A N_0}.$$

Indem man diese Gleichungen auf die Sonne anwendet (wobei die mit dem Index Null bezeichneten Werthe als für den gegenwärtigen Zustand derselben geltend betrachtet werden sollen) und demgemäss  $N_0 = 27,4$ ,  $w_0 = \frac{1}{2}$  setzt, findet man zunächst für die Grössen  $\sigma_0$  und  $k$  die folgenden zusammengehörigen Werthe:

$$k = 1,41 \quad \frac{1}{2}$$

$$\sigma_0 = 94,075 \text{ m} \quad 48,083 \text{ m}.$$

Für das Verhältniss der beiden Grössen  $\sigma$  und  $\sigma_0$  erhält man aus den obigen Gleichungen den Werth:

$$(621) \quad \frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{w r^2}{w_0 r_0^2}.$$

Da die pro Masseneinheit abgegebenen Wärmequantitäten sich verhalten wie die ganzen ausgestrahlten Wärmequantitäten, so ist (nach Gleichung (609)) hierin:

$$(622) \quad \frac{w}{w_0} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\left(\frac{8k-8}{k}\right)}$$

zu setzen, und wenn man zugleich für die Grösse  $\sigma$  wieder ihren, in Gleichung (618) angegebenen Werth einsetzt, so erhält man eine Gleichung, welcher man die folgende Form geben kann:

$$(623) \quad dt = -\frac{dr}{\sigma_0} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\left(\frac{8-8k}{k}\right)}.$$

Die Zeit, in welcher der Sonnenhalbmesser von der Grösse  $r$  bis auf die Grösse  $r_0$  abnahm, ist also zu berechnen aus der Gleichung:

$$(624) \quad t = -\frac{r_0}{\sigma_0} \left(\frac{8k-8}{k}\right) \int_r^{r_0} \frac{1}{r} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\left(\frac{8-8k}{k}\right)} dr, \text{ oder:}$$

$$(625) \quad t = \frac{k r_0}{(7k-8) \sigma_0} \left\{ 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\left(\frac{7k-8}{k}\right)} \right\}.$$

Wenn man hierin zunächst  $k = 1,41$  und demgemäss  $\sigma_0 = 94,075$  m setzt, so nimmt diese Gleichung nach Substitution des Werthes  $r_0 = 688\,000\,000$  m die folgende Form an:

$$(626) \quad t = 5\,514\,312 \left\{ 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{1,336} \right\}.$$

Für die beiden Grössen  $r_0/r$  und  $t$  ergeben sich hieraus die nachfolgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe:

$r_0/r = 1$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$
$t = 0$	9 315 060	5 254 154	5 502 036	5 509 864

Da der Erdbahnhalmmesser etwa 215-mal so gross ist als der gegenwärtige Sonnenhalbmesser, so würde demnach aus den hier gemachten Voraussetzungen sich ergeben, dass vor etwa 5,5 Millionen Jahren der Sonnenhalbmesser so gross wie der Erdbahnhalmmesser war.

Der obigen Untersuchung wurde die Voraussetzung zu Grunde gelegt: dass die Tiefe der Wärme ausstrahlenden Oberflächenschicht stets klein war im Verhältniss zum Halbmesser der Gaskugel. Es bleibt daher noch übrig, zu unter-

suchen, ob auch bei 215-facher Vergrößerung des Sonnenhalbmessers jene Bedingung wenigstens annäherungsweise noch als erfüllt betrachtet werden dürfte.

Wenn man  $\mu = 1\,000\,000$  kg setzt — entsprechend der Hypothese, dass eine Gasschicht, deren Massenstärke mehr als eine Million Kilogramm pro Quadratmeter beträgt, als nahezu vollkommen undurchlässig für Wärmestrahlen betrachtet werden darf — so erhält man aus Gleichung (602), indem man zugleich die dem oben angenommenen Werthe  $k = 1,41$  entsprechenden Werthe  $\alpha = 2,4$  und  $\gamma = 31416$  kg substituirt, für die Grössen  $r_0/r$  und  $z/r$  die nachfolgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe:

$r_0/r =$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{25}$
$z/r =$	0,019 625	0,029 365	0,074 88	0,285 74	0,445 88

Diese Tabelle zeigt, dass allerdings für die grösseren Werthe von  $r$ , insbesondere für den Werth  $r = 215 r_0$ , die obige Bedingung nicht mehr als genügend erfüllt anzusehen ist, und dass aus diesem Grunde die oben für  $t$  gefundenen Werthe theilweise noch einer Correction bedürfen. Diese Correction wird zu Werthen von  $t$  führen müssen, welche grösser sind als die oben gefundenen. Denn die letzteren entsprechen der Annahme: dass der Radius der ausstrahlenden Kugelfläche, oder der mittlere Radius der ausstrahlenden Oberflächenschicht stets nahezu so gross war wie der ganze Halbmesser  $r$ , während in Wirklichkeit zu der Zeit, als  $r = 215 r_0$  war, jener Radius eine beträchtlich geringere Grösse hatte.

Die Gleichung (626) und die nach derselben berechnete Tabelle zeigen jedoch, dass die mit dem Wachsen von  $r$  verbundene Zunahme des Werthes von  $t$  um so langsamer erfolgt, je grösser der Halbmesser  $r$  ist, und da die oben erwähnte Correction vorwiegend die den grösseren Werthen von  $r$  entsprechenden Werthe von  $t$  betrifft, so werden — wenn auch die Differenzen der Werthe von  $t$  verhältnissmässig grosse Aenderungen durch jene Correction erleiden mögen — doch die absoluten Werthe dieser Grösse verhältnissmässig nur wenig dadurch beeinflusst werden, weil



die Correction immer nur verhältnissmässig kleine Bruchtheile des ganzen absoluten Werthes betreffen wird.

Nach der obigen Tabelle würde aus der Annahme: dass der Radius der ausstrahlenden Kugelfläche stets so gross war wie der Halbmesser der ganzen Kugelfläche, z. B. sich ergeben, dass in 255 710 Jahren der Sonnenhalbmesser von der Grösse  $215 r_0$  bis auf die Grösse  $10 r_0$  abnahm. Wenn man statt dessen die Annahme machen wollte, dass die ausstrahlende Kugelfläche während dieses Zeitraumes stets nur halb so gross war als die ganze Oberfläche — eine Annahme, aus welcher jedenfalls ein zu grosser Werth für diesen Zeitraum sich ergeben würde, nämlich 511 420 Jahre, oder das Doppelte des obigen Werthes — so würde man für den ganzen Zeitraum, in welchem der Sonnenhalbmesser von der Grösse  $215 r_0$  bis auf die gegenwärtige Grösse abnahm, den Werth erhalten:

$$t = 5\,765\,578 \text{ Jahre (statt } t = 5\,509\,864 \text{ Jahre).}$$

Also selbst in diesem Falle würde man einen Werth erhalten, welcher nur um etwa 4,6 Proc. grösser ist als der ursprünglich gefundene. Man überzeugt sich auf diese Weise leicht, dass trotz ungenügenden Erfülltseins der oben gemachten Voraussetzung die ursprünglich gefundenen Werthe von  $t$  ihrer absoluten Grösse nach immer noch als hinreichend genaue Annäherungswerthe betrachtet werden dürfen.

Wenn man statt des Werthes  $k = 1,41$  den Werth  $k = \frac{1}{2}$  annähme (welchem die Werthe  $\alpha = 1,35$ ,  $\sigma_0 = 48,083 \text{ m}$ ,  $\gamma_0 = 8568 \text{ k}$  entsprechen), so würde man nach Gleichung (625) den Werth:

$$(627) \quad t = 6\,504\,000 \left\{ 1 - \left( \frac{r_0}{r} \right)^{2,2} \right\}$$

erhalten, und wenn man unter Zugrundelegung der obigen Zahlenwerthe die Rechnung wiederholte, so würde man zu den in der folgenden Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthen gelangen:

$r_0/r =$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
$t =$	0	5 088 730	6 462 955	6 503 741	6 503 952
$z/r =$	0,003 38	0,005 877	0,021 339	0,134 637	0,248 384

Die Zahlenwerthe der dritten Horizontalreihe zeigen, dass auch in diesem Falle die nach Gleichung (627) direct

berechneten Werthe von  $t$  ohne Bedenken als hinreichend genaue Annäherungswerthe betrachtet werden dürfen. Da nach der mechanischen Wärmetheorie der Werth  $k = \frac{1}{3}$  der grösste ist, welchen das Verhältniss  $c_p/c_v$  annehmen kann, so würde aus der obigen Tabelle sich ergeben, dass die Zeit, während welcher der Sonnenhalbmesser von der Grösse  $215r_0$  bis auf die gegenwärtige Grösse abnahm, höchstens etwa 6,5 Millionen Jahre betrug.

Zu noch kleineren Werthen würde man gelangen, wenn man Rücksicht darauf nehmen wollte, dass nach übereinstimmenden Angaben neuerer Beobachter die gegenwärtig von der Sonne jährlich ausgestrahlte Wärmequantität mindestens um etwa 50 Proc. grösser ist als die von Pouillet angegebene (dem oben angenommenen Werthe  $w_0 = \frac{1}{3}$  entsprechende) Wärmequantität.<sup>1)</sup> Wenn man demgemäss  $w_0 = 2$  setzt, so erhält man — je nachdem  $k = 1,41$  oder  $k = \frac{1}{3}$  angenommen wird — für jenen Zeitraum die folgenden Werthe:

$$\begin{array}{rcl} k = & 1,41 & \frac{1}{3} \\ t = & 3\,673\,241 & 4\,335\,968 \end{array}$$

Die obigen Zahlenwerthe wurden aus der Voraussetzung abgeleitet, dass die Sonne während der ganzen Zeit  $t$  stets die Form einer Kugel hatte, und dass die ganze Masse derselben stets in rein gasförmigem Aggregatzustande sich befand. Diese Voraussetzung darf für den letzteren Theil dieses Zeitraumes, z. B. für die Zeit, in welcher der Sonnenhalbmesser von der Grösse  $2r_0$  bis auf die Grösse  $r_0$  abnahm, vielleicht annäherungsweise als erfüllt betrachtet werden. Jedoch ist anzunehmen, dass in früheren Zeiten, insbesondere zu der Zeit, als die Sonnenmasse bis zur Erdbahn sich erstreckte, beträchtliche Abweichungen von dem hier vorausgesetzten Zustande stattfanden.

Um einen genaueren Werth für  $t$  zu erhalten, würde man einerseits zu berücksichtigen haben, dass die Rotationsbewegung der Sonne in früheren Zeiten eine beträchtliche Abweichung von der Kugelgestalt bedingen musste; andererseits, dass zu jener Zeit die Massenstärke und die mittlere

1) Langley, The Mount Whitney Expedition. Nature, 3. Aug. 1882. Wied. Ann. 19. p. 384. 1889.

Temperatur der wärmeausstrahlenden Oberflächenschicht durch die in derselben stattfindenden Codensationsprocesse möglicherweise erheblich modifizirt werden konnten.

Wenn zwar anzunehmen ist, dass die wegen dieser Abweichungen erforderliche Correction — ebenso wie die oben in Bezug auf die Werthe von  $z$  ausgeführte Correction — wahrscheinlich nur auf einen verhältnissmässig kleinen Theil des ganzen Zeitraumes sich erstrecken würde — insofern z. B. die Zeit, in welcher der Sonnenhalbmesser von der Grösse  $215r_0$  bis auf die Grösse  $2r_0$  abnahm, nach der letzteren Tabelle nur etwa 22 Proc. des ganzen Werthes von  $t$  betragen würde —, so erscheint doch die Möglichkeit keineswegs von vornherein ausgeschlossen, dass durch Ausführung jener Correction auch der ganze Werth von  $t$  eine verhältnissmässig grosse Aenderung erleiden könnte.

Aus diesen Gründen kann für den oben gefundenen Maximalwerth:  $t = 4\,336\,000$  Jahre

die Bedeutung eines oberen Grenzwertes für das Alter der Erde allerdings nicht in Anspruch genommen werden — um so weniger als auch die sonstigen gemachten Voraussetzungen theilweise noch als ungenügend begründete Hypothesen bezeichnet werden müssen. Indessen scheint doch aus den Resultaten der vorstehenden Untersuchung gefolgert werden zu dürfen, dass das wirkliche Alter der Erde bei weitem nicht so gross sein kann, wie von einigen Geologen angenommen wird, welche dasselbe auf Hunderte von Millionen Jahren schätzen.

#### § 66. Hypothesen über die Constitution der weissen Fixsterne.

Nach Substitution des aus Gleichung (602) für die Grösse  $z$  zu entnehmenden Werthes erhält man aus Gleichung (599) für die Maximaltemperatur der ausstrahlenden Oberflächenschicht, oder für die Temperatur an der inneren Grenzfläche derselben den Werth:

$$(628) \quad T = T_0 \left\{ \frac{\mu k}{\gamma_0 (k-1) \alpha r} \right\}^{\frac{h-1}{h}}.$$

Indem man ein anderes Mal dieselbe Gleichung auf eine andere Gaskugel von derselben Beschaffenheit anwendet —

entsprechend der nur annäherungsweise richtigen Voraussetzung, dass die Massenstärke der wärmeausstrahlenden Oberflächenschicht unabhängig ist von der Temperatur derselben —, findet man für das Verhältniss jener beiden Grenztemperaturen den Werth:

$$(629) \quad \frac{T}{T'} = \frac{T_0}{T'_0} \left( \frac{\gamma_0 r'}{\gamma_0 r} \right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Wenn mit  $S$  und  $S'$ , resp. die Massen der beiden Gaskugeln bezeichnet werden, so hat das Verhältniss ihrer beiden Mittelpunktstemperaturen (nach § 12 und § 31) die Grösse:

$$(630) \quad \frac{T_0}{T'_0} = \frac{S}{S'} \cdot \frac{r'}{r},$$

und da das Verhältniss der Grenztemperaturen der ausstrahlenden Oberflächenschichten übereinstimmt mit dem Verhältniss ihrer mittleren Temperaturen, so erhält man für das letztere Verhältniss, welches in abgekürzter Redeform auch das Verhältniss der Oberflächentemperaturen genannt werden kann, den Werth:

$$(631) \quad \frac{\tau}{\tau'} = \frac{S}{S'} \cdot \frac{r'}{r} \left( \frac{\gamma_0 r'}{\gamma_0 r} \right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Wenn ferner mit  $\delta$  und  $\delta'$  die mittleren Dichtigkeiten der beiden Gaskugeln bezeichnet werden, so kann:

$$(632) \quad \frac{\gamma_0}{\gamma_0'} = \frac{\delta}{\delta'} \quad \text{und:} \quad (633) \quad \frac{S}{S'} = \left( \frac{r}{r'} \right)^3 \left( \frac{\delta}{\delta'} \right)$$

gesetzt werden. Mit Benutzung dieser Gleichungen kann man dem oben für das Verhältniss der Oberflächentemperaturen gefundenen Ausdrücke die folgende Form geben:

$$(634) \quad \frac{\tau}{\tau'} = \left( \frac{S}{S'} \right)^{\frac{k+1}{3k}} \cdot \left( \frac{\delta}{\delta'} \right)^{\frac{2-k}{3k}}.$$

Unter Voraussetzung gleicher physikalischer und chemischer Eigenschaften der Stoffe, aus welchen die Sonne und die Fixsterne zusammengesetzt sind, würde man diese Gleichung zur Beantwortung der Frage benutzen können: unter welchen Umständen die Oberflächentemperatur eines Fixsterns grösser sein kann als die gegenwärtige Oberflächentemperatur der Sonne, wobei der Ausdruck „Oberflächentemperatur“ stets in dem oben erklärten Sinne aufzufassen ist.

Für die beiden Exponenten der obigen Gleichung ergeben sich die folgenden Zahlenwerthe:

$k = \frac{1}{3}$	1,41	$\frac{1}{3}$
$(k+1)/3k = \frac{4}{3}$	0,57	$\frac{1}{3}$
$(2-k)/3k = \frac{5}{3}$	0,14	$\frac{1}{3}$

Diese Tabelle zeigt, dass der Exponent des Massenverhältnisses nahezu unabhängig ist von dem Werthe des Quotienten  $k$ , und dass derselbe stets nur wenig grösser als 0,5 ist. Da die oben gemachte Voraussetzung der Unabhängigkeit der Absorption von der Temperatur ohnehin zu grosse Werthe für diesen Exponenten ergeben musste, so darf man annäherungsweise diesen Exponenten gleich 0,5 setzen, woraus der folgende Satz sich ergibt:

„Die Oberflächentemperaturen zweier Fixsterne von gleichen Dichtigkeiten verhalten sich annähernd wie die Quadratwurzeln aus ihren Massen.“

Wenn man  $S = S'$  setzt, so erhält man für das Verhältniss der Oberflächentemperaturen den Werth:

$$(635) \quad \frac{T}{T'} = \left( \frac{\delta}{\delta'} \right)^{\frac{2-k}{3k}}.$$

Die in obiger Tabelle für den Exponenten des Dichtigkeitsverhältnisses angegebenen Werthe zeigen, dass in den hier hauptsächlich in Betracht kommenden Fällen der grösseren Werthe von  $k$  die Oberflächentemperatur nahezu als unabhängig von der Dichtigkeit betrachtet werden kann, insofern eine erhebliche Zunahme der Oberflächentemperatur erst bei sehr grosser Dichtigkeitszunahme eintreten würde.

So z. B. würden dem Werthe  $T/T' = 2$  die folgenden Werthe des Verhältnisses der Dichtigkeitszunahme entsprechen:

$k = \frac{1}{3}$	1,41	$\frac{1}{3}$
$\delta/\delta' = 0,4$	144	32768

Für die gegenwärtige Mittelpunktsdichtigkeit der Sonne würde man nach § 31 die folgenden Werthe erhalten:

$k = \frac{1}{3}$	1,41	$\frac{1}{3}$
$\delta_0' = 81400$	31416	8568

Die Vergleichung dieser beiden Tabellen zeigt, dass die Annahme einer verhältnissmässig geringen Steigerungsfähigkeit

der Oberflächentemperatur der Sonne schon die Voraussetzung einer die Grenzen der Wahrscheinlichkeit weit überschreitenden Steigerungsfähigkeit ihrer Mittelpunktsdichtigkeit bedingen würde — welcher Werth auch immer für das Verhältniss der beiden specifischen Wärme angenommen werden möge. Dass die Oberflächentemperatur der Sonne in Zukunft noch erheblich wachsen werde, ist hiernach als durchaus unwahrscheinlich zu betrachten. Mit grösserer Wahrscheinlichkeit darf vielleicht angenommen werden, dass dieselbe gegenwärtig bereits in langsamem Abnehmen begriffen ist.

Die oben für die gegenwärtige Mittelpunktsdichtigkeit der Sonne angegebenen Werthe wurden aus der Voraussetzung einer unbeschränkten Gültigkeit des Mariotte'schen Gesetzes abgeleitet, und jene Werthe können im Gegensatze zur „wirklichen“ Mittelpunktsdichtigkeit die „theoretischen“ Werthe derselben genannt werden. Die wirkliche Mittelpunktsdichtigkeit ist höchst wahrscheinlich kleiner als die theoretische, insofern man annehmen darf, dass die Sonne diejenige Entwicklungsphase, bei welcher infolge des allmählichen Wachsens der Dichtigkeit die annähernde Gültigkeit des Mariotte'schen Gesetzes aufhörte, schon in längst vergangener Zeit überschritten hatte.

Wenn aber die wirkliche Mittelpunktsdichtigkeit kleiner ist als die theoretische, so muss die wirkliche Dichtigkeit der Oberflächenschicht grösser sein als die theoretische, und infolge dessen muss die wirkliche Oberflächentemperatur kleiner sein als die theoretische, weil die Tiefe, bis zu welcher die directe Wärmeausstrahlung in den leeren Raum sich erstreckt, um so kleiner sein wird, je grösser die Dichtigkeit der Oberflächenschicht ist.

Da die Abweichungen vom Mariotte'schen Gesetze mit wachsender Dichtigkeit zunehmen, so musste in früherer Zeit, als wegen geringerer Dichtigkeit jene Abweichungen gleichfalls geringer waren, die Differenz zwischen der wirklichen und der theoretischen Oberflächentemperatur kleiner gewesen sein als jetzt, und hiernach wäre die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass die wirkliche Oberflächentemperatur in früheren Zeiten grösser war als jetzt. Jedenfalls aber

ist die etwaige Differenz zwischen der gegenwärtigen Oberflächentemperatur und jenem vielleicht in früherer Zeit erreichten Maximalwerthe derselben in enge Grenzen eingeschlossen. Denn zu keiner Zeit konnte die wirkliche Oberflächentemperatur grösser gewesen sein als die theoretische. Für die letztere aber erhält man nach der Tabelle des § 64 um so kleinere Werthe, je weiter man die Zustandsänderung der Sonne nach rückwärts verfolgt. Als Resultat dieser Untersuchung ergibt sich hiernach der folgende Satz:

„Die Oberflächentemperatur der Sonne war niemals erheblich grösser, und kann auch in Zukunft niemals erheblich grösser werden, als dieselbe gegenwärtig ist.“

Aus den oben gefundenen beiden Sätzen folgt, dass die Oberflächentemperatur eines Fixsterns nur dann erheblich grösser sein kann als die gegenwärtige Oberflächentemperatur der Sonne, wenn die Masse des Fixsterns grösser ist als die Masse der Sonne. Bei geringer Temperaturdifferenz würde die höhere Oberflächentemperatur eines Fixsterns allerdings auch erklärt werden können durch die Annahme, dass die Sonne den Culminationspunkt ihrer Oberflächentemperatur gegenwärtig bereits überschritten hat, und dass der betreffende Fixstern den gegenwärtigen Dichtigkeitszustand der Sonne noch nicht erreicht hat. Jedenfalls aber darf man behaupten, dass eine solche Temperaturdifferenz auf eine viel ungezwungenere Weise sich erklären lässt durch Annahme einer grösseren Masse des Fixsterns, und dass diese letztere Annahme für die Erklärung hoher Oberflächentemperaturen einen bei weitem grösseren Spielraum bietet als die Annahme einer geringeren Dichtigkeit des Fixsterns, insofern nach dem ersten der obigen beiden Sätze z. B. der vierfachen Masse schon die doppelte Oberflächentemperatur entsprechen würde.

Da das Wachsen der Oberflächentemperatur eines weissglühenden Körpers ein zunehmendes Vorherrschen der blauen und violetten Strahlen im Spectrum des von demselben ausgesendeten Lichtes bedingt, so darf man annehmen, dass diejenigen Fixsterne, deren Licht im Gegensatze zu dem gelb-



lichweissen Lichte der Sonne in Folge vorherrschender Intensität der stärker brechbaren Strahlen weiss oder bläulich-weiss erscheint (Sirius, Wega) eine höhere Oberflächentemperatur besitzen als die Sonne.<sup>1)</sup> Aus den hier aufgestellten Hypothesen würde demnach der folgende Satz sich ergeben:

„Die Massen der weissen Fixsterne sind grösser als die Masse der Sonne.“

§ 67. Hypothesen über die Constitution der rothen Fixsterne.

Eine im adiabatischen Gleichgewichtszustande befindliche Gaskugel, deren Masse so gross ist wie die Masse der Sonne, und deren Halbmesser das Hunderttausendfache des Sonnenhalbmessers beträgt, würde eine so geringe mittlere Dichtigkeit besitzen, dass selbst die vom Mittelpunkte ausgesendeten Strahlen nur eine verschwindend geringe Absorption erleiden würden, insofern die Gesamtstärke der Massenschicht, welche ein solcher Strahl zu durchdringen hätte, nur wenige hundert Kilogramm pro Quadratmeter betragen würde.

Die pro Zeiteinheit von der Gaskugel ausgestrahlte Wärmequantität wird bei diesem Dichtigkeitszustande nur von der Temperatur abhängen können, und mit wachsender Temperatur wird dieselbe zunehmen müssen. Da bei der durch Wärmeabgabe bedingten Contraction die innere Wärme der Gaskugel dem Halbmesser umgekehrt proportional zunimmt, so wird während der Contraction die pro Zeiteinheit ausgestrahlte Wärmequantität jedenfalls zunehmen müssen, solange noch die mittlere Dichtigkeit so klein ist, dass die obige Bedingung annäherungsweise als erfüllt betrachtet werden kann.

Wenn später die mittlere Dichtigkeit so gross geworden ist, dass die directe Ausstrahlung in den leeren Raum gerade bis zum Mittelpunkte sich erstreckt, so beginnt mit diesem Zeitpunkte die Bildung eines centralen Kernes, dessen Massentheile keine Wärmestrahlen mehr direct in den leeren Raum aussenden können. Bei weiterem Fortschreiten der Contraction wird der Radius dieses vor directer Ausstrahlung

1) Vgl. H. C. Vogel. Resultate spectralphotometrischer Untersuchungen. Berl. Ber. Sitzung vom 21. Oct. 1880.

geschützten Kernes anfangs zunehmen; später aber, wenn die Differenz zwischen dem Radius des Kernes und dem ganzen Halbmesser, oder die Tiefe der ausstrahlenden Oberflächenschicht, nur noch einen kleinen Bruchtheil vom ganzen Halbmesser bildet, wird der Radius des Kernes wieder abnehmen müssen, weil der ganze Halbmesser fortwährend abnimmt.

In Bezug auf diese letztere Entwicklungsperiode wurde in § 64 gezeigt, dass während derselben eine stetige Abnahme der pro Zeiteinheit ausgestrahlten Wärmequantität stattfindet, und da während jener ersten Entwicklungsperiode die Ausstrahlung anfangs jedenfalls zunahm, so musste bei irgend einem Zwischenzustande die pro Zeiteinheit ausgestrahlte Wärmequantität ein Maximum erreichen.

Im vorigen Paragraphen wurde gezeigt, dass während dieser letzteren Periode zwar die theoretische Oberflächentemperatur beständig zunehmen würde, dass aber infolge der Abweichungen vom Mariotte'schen Gesetze die wirkliche Oberflächentemperatur nach Ueberschreitung eines gewissen Culminationspunktes anfangen muss wieder abzunehmen.

Zugleich ergibt sich aus den Untersuchungen des § 65, dass ein Fixstern den Culminationspunkt der Wärmeausstrahlung stets früher erreicht als den Culminationspunkt der Oberflächentemperatur. Der erstere entspricht dem Zeitpunkte der grössten Helligkeit oder Lichtstärke des Sterns, die letztere dem Zeitpunkte, in welchem die den Gesamteindruck des ausgesendeten Lichtes repräsentirende Farbe dem violetten Ende des Spectrums am nächsten rückt, und in welchem bei hinreichend grosser Masse des Sterns das Licht desselben bläulichweiss erscheint. Den ersteren Culminationspunkt überschritt die Sonne vielleicht zu einer Zeit, als ihr Halbmesser noch ungefähr so gross wie der Erdbahnhalmmesser war, während der letztere Culminationspunkt einem Zustande entspricht, welcher höchst wahrscheinlich nur wenig von dem gegenwärtigen Zustande verschieden ist.

Nach dem Ueberschreiten des ersteren Culminationspunktes nimmt die Lichtstärke schon ab, während die Oberflächentemperatur noch zunimmt. Mit dem Ueber-

sch  
glei  
rot  
Fix  
Ob  
mu  
noc  
war  
rot  
Cul  
trä

rat  
zur  
zur  
nach  
Fix  
unte  
Fix  
ihre  
letz  
Cul  
§ 6  
nati  
als  
rat  
höre  
Lich  
gene  
müs

tigk  
Ent  
vorw  
geh  
jenig

schreiten des letzteren beginnt die Oberflächentemperatur gleichfalls abzunehmen, und die Lichtfarbe fängt an, dem rothen Ende des Spectrums wieder näher zu rücken. Ein Fixstern, welcher zur Zeit des Culminationspunktes seiner Oberflächentemperatur bläulich weisses Licht aussendet, musste in früherer Zeit, als seine Oberflächentemperatur noch sehr weit von dem Maximalwerthe derselben entfernt war, roth erscheinen, und ebenso wird derselbe später wieder roth erscheinen müssen, wenn nach dem Ueberschreiten des Culminationspunktes die Oberflächentemperatur wieder beträchtlich abgenommen hat.

Wenn man die Fixsterne nach ihren Oberflächentemperaturen in drei Classen eintheilt, indem man nach Vogel<sup>1)</sup> zur ersten Classe die weissen Sterne, zur zweiten die gelben, zur dritten Classe die rothen Sterne rechnet, so würde man nach der hier aufgestellten Theorie innerhalb der dritten Fixsternclasse zwei Gruppen oder Unterabtheilungen zu unterscheiden haben. Zur ersteren würden diejenigen rothen Fixsterne zu rechnen sein, deren Oberflächentemperaturen ihren Culminationspunkt noch nicht erreicht haben; zur letzteren alle diejenigen, deren Oberflächentemperaturen ihren Culminationspunkt bereits überschritten haben. Da nach § 65 angenommen werden darf, dass ein Fixstern den Culminationspunkt seiner Lichtstärke stets viel früher erreicht als den Culminationspunkt seiner Oberflächentemperatur, so werden die der ersteren Unterabtheilung angehörenden Fixsterne vorwiegend geringe Dichtigkeit und grosse Lichtstärke, die der letzteren angehörenden dagegen vorwiegend grosse Dichtigkeit und geringe Lichtstärke besitzen müssen.

Wenn man ferner annehmen darf, dass grössere Dichtigkeit in Verbindung mit relativ niedriger Temperatur die Entstehung chemischer Verbindungen begünstigt, so würde vorwiegend im Spectrum der zur letzteren Unterabtheilung gehörigen älteren dichteren Sterne das Auftreten von denjenigen Absorptions-Streifen oder -Banden zu erwarten sein,

1) H. C. Vogel, „Spectralanalyt. Mitth.“ Astron. Nachr. Nr. 2000.

welche auf die Anwesenheit chemischer Verbindungen in der Oberflächenschicht hindeuten.

Hiernach könnte die Frage aufgeworfen werden: ob die von Vogel mit III<sub>a</sub> und III<sub>b</sub> bezeichneten beiden Unterabtheilungen der dritten Fixsternclasse (Typus III und Typus IV nach Secchi) vielleicht identisch sind mit den hier auf Grund theoretischer Erwägungen aufgestellten beiden Unterabtheilungen, und ob aus dem eigenartigen Bandenspectrum der Abtheilung III<sub>b</sub> — sowie aus dem Umstande, dass unter den bisher beobachteten Sternen dieser Abtheilung keiner die fünfte Grösse überschreitet — vielleicht geschlossen werden darf, dass die Sterne dieser Abtheilung zu denjenigen älteren dichteren lichtschwächeren Sternen gehören, welche den Culminationspunkt ihrer Oberflächentemperatur bereits überschritten haben. Die Beantwortung dieser Fragen muss den weiteren Forschungen der Spectralanalyse überlassen werden.

Wie bei den Sternen der dritten Classe, so würde man vielleicht auch bei den Sternen der zweiten und ersten Classe je zwei Unterabtheilungen unterscheiden können: nämlich die der relativ jüngeren Sterne, welche den Culminationspunkt ihrer Oberflächentemperatur noch nicht erreicht haben, und die der älteren Sterne, welche denselben bereits überschritten haben. Jedenfalls wird man annehmen dürfen, dass die Beschaffenheit des Spectrums eines Fixsternes nicht allein von der Temperatur, sondern auch von der mit dem Alter zunehmenden Dichtigkeit seiner Oberflächenschicht abhängt, und dass die Spectra zweier Fixsterne von gleichen Oberflächentemperaturen verschieden sein können, wenn ihre Oberflächenschichten ungleiche Dichtigkeiten besitzen. Da nach § 65 die Oberflächentemperatur eines Fixsternes zugleich von der Massengrösse desselben abhängt, so wird das Spectrum desselben gleichzeitig von der Masse und dem relativen Alter des Fixsternes abhängen müssen. Die Beantwortung der Frage: ob für eine befriedigende theoretische Erklärung der bisher beobachteten verschiedenen Spectra die Annahme von Massendifferenzen und Altersdifferenzen allein schon ausreichen würde, muss ebenfalls den weiteren Forschungen der Spectralanalyse überlassen werden.

§ 68. Muthmassliche Ursachen der geringeren Häufigkeit der rothen Fixsterne.

Wenn man in Gleichung (624) die beiden Integrationsgrenzen miteinander vertauscht, so erhält man für die Zeit, in welcher der Sonnenhalbmesser von der Grösse  $r_0$  bis auf die Grösse  $r$  abnehmen würde, die Gleichung:

$$(636) \quad t = \frac{k r_0}{(7k-8) \sigma_0} \left\{ \left( \frac{r_0}{r} \right)^{\frac{7k-8}{k}} - 1 \right\},$$

welche nach Substitution der Werthe  $k = \frac{5}{3}$  und  $\sigma_0 = 48$  m die folgende Form annimmt:

$$(637) \quad t = 6\,504\,000 \left\{ \left( \frac{r_0}{r} \right)^{3,2} - 1 \right\}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man z. B. für die Zeit, in welcher der Sonnenhalbmesser bis auf die Hälfte der gegenwärtigen Grösse abnehmen würde, der Werth  $t = 23,4$  Millionen Jahre. Nach Gleichung (627) würde unter denselben Voraussetzungen der Zeitraum, in welchem der Sonnenhalbmesser von der Grösse  $2r_0$  bis auf die Grösse  $r_0$  abnahm, etwa 5,1 Millionen Jahre betragen. Hiernach würde die ganze Dauer der Abnahme des Sonnenhalbmessers von der Grösse  $2r_0$  bis auf die Grösse  $\frac{1}{2}r_0$  etwa 28,5 Millionen Jahre betragen, also etwa das Zwanzigfache von demjenigen Zeitraume, in welchem der Sonnenhalbmesser von der Grösse  $215r_0$  bis auf die Grösse  $2r_0$  abnahm, insofern dieser letztere Zeitraum nach Gleichung (627) nur etwa 1,4 Millionen Jahre betragen würde.

Wenn auch aus den bereits in § 66 angeführten Gründen die auf solche Weise berechneten theoretischen Werthe als rohe Annäherungswerthe betrachtet werden müssen, welche nur einen äusserst geringen Grad von Zuverlässigkeit beanspruchen können und von den wirklichen Werthen sehr weit abweichen mögen, so scheint doch aus den obigen Resultaten gefolgert werden zu dürfen, dass in früheren Zeiten, z. B. zu der Zeit, als der Sonnenhalbmesser noch das Hundertfache der gegenwärtigen Grösse hatte, die Zustandsänderung und die Volumenabnahme der Sonnenmasse ausserordentlich viel rascher erfolgte als bei dem gegenwärtigen

Zustande, welcher, mit jenem früheren verglichen, als nahezu stationär gelten kann.

Hieraus darf zugleich geschlossen werden, dass die Dauer derjenigen Periode, in welcher die Sonne als Fixstern eine grössere Helligkeit als gegenwärtig besass, sehr klein war im Verhältniss zu derjenigen Periode, in welcher dieselbe eine von der gegenwärtigen nur wenig abweichende Helligkeit besass und besitzen wird. Dem Culminationspunkte der Wärmeausstrahlung eines Fixsterns entspricht immer ein verhältnissmässig rasch vorübergehender Zustand; dem Culminationspunkte der Oberflächentemperatur dagegen ein Zustand, in welchem der Fixstern verhältnissmässig lange verweilt.

Aus Gleichung (636) würde man für  $r = 0$  den Werth  $t = \infty$  erhalten, d. h. wenn die Sonnenmasse die Eigenschaften eines idealen Gases besässe, so würde das Volumen derselben erst nach unendlich langer Zeit die Grösse Null erreichen, und das Leuchten der Sonne würde ewig fort-dauern müssen. Da jedoch von einer unbegrenzten Steigerungsfähigkeit ihrer Dichtigkeit in Wirklichkeit nicht die Rede sein kann, so muss angenommen werden, dass die Sonne schon nach einem bestimmten endlichen — wenn auch wahrscheinlich sehr langen — Zeitraume einen Grenzzustand erreichen wird, bei welchem das Leuchten derselben ganz aufhört, und die gleiche Annahme muss in Bezug auf jeden anderen Fixstern gemacht werden. In diesem Sinne kann — wie bei einem Cometen oder Meteoriten — so auch bei einem Fixsterne von einer bestimmten Erscheinungsdauer desselben die Rede sein, wenn auch der Zeitraum, welcher zwischen dem ersten Aufleuchten und dem nachherigen Erlöschen verstreicht, vielleicht mehrere hundert Millionen Jahre betragen mag.

Die ganze Erscheinungsdauer eines Fixsterns wird (nach der im vorigen Paragraphen aufgestellten Theorie) durch den Culminationspunkt der Wärmeausstrahlung und den Culminationspunkt der Oberflächentemperatur in drei Zeitabschnitte zerlegt. Während des ersten Zeitabschnittes war die Quantität der pro Zeiteinheit ausgestrahlten Wärme in beständigem Zunehmen begriffen. Die Zustandsänderung

erfolgte zu Anfang dieses Zeitschnittes — zu der Zeit, als der Stern noch im Zustande eines Nebenfleckes sich befand — sehr langsam, weil zu dieser Zeit die Wärmeausstrahlung noch sehr gering war, und später als der Stern bei zunehmender Verdichtung dem Maximum seiner Helligkeit sich näherte, sehr rasch. Während des zweiten Zeitabschnittes ist die Wärmeausstrahlung in beständigem Abnehmen begriffen; die Geschwindigkeit der Zustandsänderung ist anfangs gross und wird später, wenn die Oberflächentemperatur ihrem Maximalwerthe sich nähert, allmählich kleiner. Während des dritten Zeitabschnittes sind Wärmeausstrahlung und Oberflächentemperatur beide in beständigem Abnehmen begriffen, und während dieses ganzen Zeitraumes ändert sich der Zustand sehr langsam.

Auf die sehr lange Periode des langsamen Entstehens folgt also eine sehr kurze mittlere Periode, in welcher die Zustandsänderung mit sehr grosser Geschwindigkeit stattfindet, und auf diese folgt die wiederum sehr lange Periode des langsamen Erlöschens. Wenn man demgemäss die Fixsterne nach ihrem Alter in drei Classen eintheilt, welche den obigen drei Entwicklungsphasen entsprechen, so würde man zur ersten Altersklasse *A* diejenigen Sterne zu rechnen haben, welche noch in der Entwicklungsphase der Nebelflecken sich befinden; zur zweiten Altersklasse *B* diejenigen, welche sich in der rasch vorübergehenden Periode des grössten Glanzes befinden; zur dritten Altersklasse *C* diejenigen Sterne, welche bereits in die sehr lange Periode des langsamen Erlöschens eingetreten sind. Bei dieser Eintheilung würde jedoch zu berücksichtigen sein, dass der Ausdruck „Altersklasse“ nicht auf das absolute, sondern auf das relative Alter der Sterne sich bezieht, insofern ein Fixstern von geringer Masse die aufeinander folgenden Phasen seiner Entwicklung rascher durchläuft als ein Fixstern von grosser Masse.

Da die Altersperiode, in welcher die zur Altersklasse *B* gehörigen Sterne sich befinden, eine Entwicklungsphase von verhältnissmässig sehr kurzer Dauer repräsentirt, so ist nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit zu erwarten, dass die Anzahl derjenigen Sterne, welche gleichzeitig in dieser



Altersperiode sich befinden, stets klein ist im Verhältniss zur Gesamtzahl der Sterne und auch im Verhältniss zu der Anzahl derjenigen Sterne, welche der Altersklasse *C* angehören.

Nach den hier aufgestellten Hypothesen würden zur Altersklasse *B* die jüngeren Sterne der dritten Fixsternklasse gehören, nämlich diejenigen rothen Sterne, welche den Culminationspunkt ihrer Oberflächentemperatur noch nicht erreicht haben; zur Altersklasse *C* dagegen ausser den Sternen der ersten und zweiten Classe auch noch die älteren Sterne der dritten Classe, nämlich diejenigen rothen Sterne, welche nach Ueberschreitung des Culminationspunktes ihrer Oberflächentemperatur bereits einen dem völligen Erlöschen sich nähernden Zustand erreicht haben.

In Bezug auf diese letzteren Sterne ist jedoch nicht mit Sicherheit zu erwarten, dass dieselben auch unter den gegenwärtig wirklich sichtbaren Sternen in grosser Anzahl vertreten sein müssten, einerseits aus dem Grunde weil dieselben infolge ihrer Lichtschwäche vielleicht grossentheils der Beobachtung sich entziehen, andererseits, weil es recht wohl möglich wäre, dass das ganze Fixsternsystem noch in einer Periode des relativen Jugendalters sich befindet, und dass infolge dessen nur erst einige wenige Fixsterne von geringer Massengrösse denjenigen Zustand bereits erreicht haben, welcher dem Erlöschen unmittelbar vorausgeht.

Hiernach scheinen die Resultate der Spectralbeobachtungen den oben aufgestellten Hypothesen günstig gedeutet werden zu dürfen, insofern unter 3702 einer bestimmten Zone angehörigen von Vogel<sup>1)</sup> untersuchten Sternen 2165 zur ersten Classe, 1240 zur zweiten Classe, 288 zur Classe III., und 9 zur Classe III<sub>b</sub> gehörten.

1) H. C. Vogel, „Publicationen des Astrophysikalischen Observatoriums“ zu Potsdam Nr. 11 Jahrg. 1883.

XI.  
heit

digk  
Einl  
die  
Betr  
telb  
Zeit  
heit  
dies  
erha

sche  
dur  
dab  
nac  
Rac  
sow  
Bes  
Um  
ber  
ver  
Na  
die

(1)

Da  
stin

(2)

(3)

Die  
in  
fun

vee

M

# XI. Die Reduction der mechanischen Grundeinheiten auf eine einzige Dimension; von E. Budde.

Eine Zeit heisse  $T$ , ein Länge  $L$ , Masse  $M$ , Geschwindigkeit  $V$ , Potentialfunction  $P$ ; Dimensionen werden durch Einklammerung dieser Symbole bezeichnet, z. B.  $(V) = (L/T)$ ; die Einheiten der Grössen werden  $T_1, L_1, M_1$  u. s. w. geschrieben. Betrachtet man die Grössen Zeit, Länge und Masse als unmittelbar durch die Anschauung gegeben, so sollen sie gemeine Zeit, gemeine Masse u. s. w. heissen; die willkürlichen Einheiten derselben heissen dann gemeine Einheiten, und die in diesen Einheiten dargestellten Grössen  $V, P$  und ähnliche erhalten gleichfalls die Bezeichnung „gemein.“

Gauss hat gezeigt, wie man mit Hülfe des Newton'schen Gesetzes die gemeine Masse eliminiren und die Masse durch einen Ausdruck  $(L^3/T^2)$  definiren kann. Er benutzt dabei die Umlaufgeschwindigkeit eines Satelliten, der sich nach dem Newton'schen Gesetz in kreisförmiger Bahn vom Radius  $L$  um den Massenpunkt  $M$  dreht. Man kann ebenso wohl irgend eine andere mechanische Function (z. B. die Beschleunigung) von  $M$  verwenden, da sich ja aus ihr jene Umlaufgeschwindigkeit ohne neuen Recurs auf die Masse berechnen lässt. Wir wählen, um spätere Betrachtungen zu vereinfachen, die einfachste von allen, die Potentialfunction. Nach dem Newton'schen Gesetz ist, wenn  $\varepsilon$  eine Constante, die Potentialfunction von  $M$  in der Entfernung  $L$ :

$$(1) \quad P = \varepsilon \frac{M}{L}.$$

Daraus folgt, wenn man die disponiblen Einheiten so bestimmt, dass  $\varepsilon = 1$  wird:

$$(2) \quad P = \frac{M}{L}, \quad \text{also:}$$

$$(3) \quad M = PL.$$

Die Masse  $M$  lässt sich also definiren als „Potentialfunction in der Entfernung 1“; denn das ist ja  $PL$ . Die Potentialfunction selbst ist dabei zu definiren als das längs dem Radius vector  $L$  genommene Integral  $\int_0^L \varphi dL$ , in welchem  $\varphi$  die von  $M$  ausgeübte Beschleunigung darstellt;  $\varphi$  ergibt sich aus der

Betrachtung der Geschwindigkeiten, welche eine zweite Masse unter der Einwirkung von  $M$  annimmt. Es ist dabei stillschweigend vorausgesetzt, dass die geometrische Ausdehnung von  $M$  der Anwendung des Grundgesetzes in der einfachen Form Gl. (1) nicht im Wege stehe; diese Voraussetzung soll in allem folgenden, auch für das später auftretende Weber'sche Gesetz, beibehalten werden.

Geht man nun von dem Begriff der gemeinen Masse aus, so hat  $\epsilon$  eine ganz bestimmte Dimension. Wie aus (1) zu ersehen, ist:

$$(4) \quad \epsilon = \frac{P_1 L_1}{M_1},$$

und da  $P$  die Dimensionen eines Geschwindigkeitsquadrates besitzt, ist:

$$(5) \quad (\epsilon) = \frac{(L^2)}{(T^2 M)},$$

und wenn man  $\epsilon = 1$  setzt, so ist diese 1 zunächst als eine Einheit von der vorstehenden Dimension zu denken.

Die drei Grössen  $L$ ,  $M$  und  $T$ , aus denen sich die Dimension von  $\epsilon$  zusammensetzt, sind für die unmittelbare Anschauung durchaus incohärent, aber die Natur stellt einen Zusammenhang zwischen ihnen her, indem sie uns die That- sache liefert: „eine bestimmte Masse ( $M$ ) übt in der Ent- fernung ( $L$ ) eine bestimmte Beschleunigung ( $\epsilon (L^2/T^2)$ ). Hat man erst dem  $\epsilon$  in diesem Zusammenhang einen bestimmten Grössenwerth beigelegt, so genügt das Product  $PL$ , um ein gegebenes  $M$  und seine Wirkungen festzustellen; die Dimen- sion von  $\epsilon$  spielt in dieser Bestimmung keine Rolle, sondern nur sein Zahlenwerth; darauf beruht die Berechtigung,  $\epsilon$  als reine Zahl zu behandeln.

Besässen wir eine Theorie, welche die Wirkung der in der Natur gegebenen Massen auf anschauliche Verhältnisse zurückführte, so würde sich in ihr auch die Erklärung für den in Gl. (3) ausgedrückten Zusammenhang finden müssen.

Ganz dieselben Betrachtungen finden auf die Constante des electrostatischen Anziehungsgesetzes Anwendung; sie lehren dort nichts neues, weil die Beziehungen mit den vor- stehend behandelten identisch sind.

Die Natur liefert uns nun ausser der Newton'schen

und der Coulomb'schen Constante noch eine dritte Grösse, welche sich von allen Besonderheiten des Stoffes und des gegebenen Falles unabhängig zeigt, und die deshalb, wie jene, als Ausdruck einer fundamentalen Naturbeziehung aufgefasst werden darf. Das ist die Constante  $k$  der electrodynamischen Grundgesetze. Diese hat, wie  $\epsilon$ , in gemeinen Einheiten eine ganz bestimmte Dimension, die aber blos die Grössen  $L$  und  $T$  enthält; und wie jenes  $\epsilon$  benutzt werden konnte, um von den gemeinen Grössen  $M$ ,  $L$  und  $T$  die erste wegzuschaffen, so kann  $k$  dazu dienen, um aus den beiden übrig bleibenden  $L$  und  $T$  noch eine zu eliminiren. Es ist dazu nicht einmal erforderlich, dass eines der vorhandenen electrodynamischen Grundgesetze das richtige sei; es genügt, eines auszuwählen, welches irgend einen Satz von Beobachtungen so darstellt, dass sich aus ihnen die Grösse  $k$  jederzeit in gemeinen Einheiten berechnen lässt. Man kann dann auf Grund der Beobachtung die Verhältnisse eines willkürlich fingirten Falles (ein solcher ist ja auch, genau genommen, der Gauss'sche Satellit) mathematisch darstellen, und an ihnen die erforderlichen Definitionen entwickeln.

Wir fingiren also eine ruhende Masse  $M$ , welche andere Massen  $\mu$  nach dem Weber'schen Gesetz anzieht. (Man wird leicht ersehen, dass das Riemann'sche Gesetz ganz analoge Ergebnisse liefert, das Clausius'sche gleichfalls, wenn man dem  $M$  eine absolute Geschwindigkeit ertheilt.) Eine angezogene Masse  $\mu$  bewege sich auf einer durch  $M$  gehenden Geraden mit der Geschwindigkeit  $V$ .  $M$  hat dann eine Potentialfunction:

$$(6) \quad P = \epsilon \frac{M}{L} (1 - kV^2),$$

und wenn  $M$  in gemeinen Masseneinheiten gegeben ist, so reichen die Beobachtungsdaten vollständig aus, um den Werth von  $P$  für jedes  $L$  und  $V$  zu berechnen. Wir finden zunächst einen Werth von  $P$  für  $V = 0$ :

$$(7) \quad P_0 = \epsilon \frac{M}{L},$$

setzen darin  $\epsilon = 1$  und haben damit die Gauss'sche Massenbestimmung, in welcher  $L_1$  und  $T_1$  noch willkürlich sind. Vermöge derselben vereinfacht sich (7) zu:

$$(8) \quad P = \frac{M}{L}(1 - kV^2).$$

Hierin hat nun die Constante  $k$  in gemeinen Einheiten eine ganz bestimmte Dimension; denn damit die Formel homogen sei, muss  $k$  ein reciprokes Geschwindigkeitsquadrat, also:

$$(9) \quad (k) = \left(\frac{T^2}{L^2}\right)$$

sein. Zähler und Nenner des Bruches  $T^2/L^2$  sind, ganz wie bei  $\epsilon$ , für unsere Anschauung incohärent. Wir sind zwar so an den Umgang mit Geschwindigkeiten gewöhnt, dass wir leicht zu dem Glauben gelangen könnten, eine Geschwindigkeit, also ein Quotient  $L/T$ , sei direct vorstellbar; aber das ist nicht der Fall; was wir bei Betrachtung einer Geschwindigkeit anschauen, das sind einerseits die consecutiven Orte des bewegten Punktes und ihre Distanzen  $L$ , andererseits die entsprechenden Zeiträume, aber nicht das Verhältniss beider; dies ist eine transcendente Beziehung.

Ganz wie Gl. (1) können wir nun (8) umkehren und als Bestimmungsgleichung für die Grösse  $V$  benutzen. Wir finden:

$$(10) \quad V^2 = \frac{M - PL}{kM}$$

und durch diese Gleichung wird der Grössenwerth von  $V$  wieder unabhängig von den Dimensionen der Constante; er hängt nur vom Zahlenwerth von  $k$  ab, und wenn wir den willkürlich festsetzen, ist  $V$  vollkommen bestimmt. Wir setzen also, mit demselben Recht wie bei  $\epsilon$ , fest:

$k$  soll die Zahl 1 sein.

Dann ist:

$$(11) \quad V^2 = \frac{M - PL}{M}.$$

$PL$  ist die Masse eines Körpers, der nach dem Newton'schen Gesetz in der Entfernung  $L$  die gleiche Beschleunigung üben würde, welche  $M$  nach dem Weber'schen ausübt. Nennen wir  $PL$  die „scheinbare Masse“ des anziehenden Körpers  $M$ , so besagt Gl. (11): Das Quadrat der Geschwindigkeit des angezogenen Körpers  $\mu$  ist die Differenz zwischen der wahren und der scheinbaren Masse des anziehenden Körpers  $M$ , dividirt durch dessen wahre Masse. Man sieht leicht, dass die Daten auf der rechten Seite der Gleichung für ein gegebenes  $M$  aus der Beobachtung jederzeit herstellbar sind.

Dadurch wird nun  $V^2$ , wie man ohne weiteres sieht, eine reine Zahl, also auch  $V$ , und da  $(V) = (L/T)$ , wird:

(12)  $(L) = (T)$ , und wenn man dies in die Gauss'sche Bestimmung:

(13)  $(M) = \left(\frac{L^2}{T^2}\right)$  einsetzt, wird:

(14)  $(M) = (T)$ ,

zwei bemerkenswerthe einfache Beziehungen. Es ist hiernach mit Hülfe des Weber'schen Gesetzes möglich, Längen und Massen durch reine Zeiten zu definiren. Das geschieht am bequemsten mit Hülfe der von Weber eingeführten, von Helmholtz benannten Begriffe „kritische Geschwindigkeit  $c = \sqrt{1/k}$ “ und „kritische Entfernung  $\lambda$ “. Erstere ist in gemeinen Einheiten unabhängig von aller Besonderheit des Falles gegeben; letztere lässt sich für jede gegebene Masse  $M$  in gemeinen Längeneinheiten bestimmen unter der fictiven Voraussetzung, dass die Masse dem Gesetz (6) gehorcht. Weber<sup>1)</sup> bestimmt die kritische Entfernung an zwei electricischen Theilchen, deren Quantitäten  $e$  und  $e'$ , deren Massen (Trägheitscoefficienten)  $q$  und  $q'$  seien, durch die Gleichung:

(15)  $\lambda = 2 \left( \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} \right) \frac{ee'}{c^2}$ .

Bei den von uns vorausgesetzten Körpern  $M$  und  $\mu$  ist Quantität und Masse identisch; setzen wir  $\mu = M$ , so wird:

(16)  $q = q' = e = e' = M$ ,

und Gl. (15) reducirt sich auf:

(17)  $\lambda = \frac{4M}{c^2}$ .

Dieses  $\lambda$ , die kritische Entfernung zweier gleichen Massen  $M$ , nennen wir kurzweg „die kritische Entfernung der Masse  $M$ “. Setzen wir  $k = 1/c^2 = 1$ , so ist:

(18)  $\lambda = 4M$ , also auch umgekehrt:

(19)  $M = \frac{1}{4} \lambda$ .

Damit erhalten wir folgende Bestimmungen für die Fundamentalgrößen:

1) W. Weber, *Electrodynam Maassbestimmungen*, insbes. über das Princip der Erhaltung der Energie, Leipzig 1871, id. über die Energie der Wechselwirkung, Leipzig 1878.

1. Die Zeit ist die gemeine Zeit.
2. Die Geschwindigkeit eines Punktes ist der Quotient aus seiner gemeinen Geschwindigkeit und der gemeinen Geschwindigkeit  $c$ , wenn beide in denselben willkürlichen Einheiten ausgedrückt sind.

3) Die Länge einer Strecke ist die Zeit, in welcher sie mit der Geschwindigkeit eins durchlaufen wird.

4) Die Masse eines Körpers ist ein Viertel seiner als Zeit ausgedrückten kritischen Entfernung.

Damit ist die Reduction des Längen- und Massenmaasses auf Zeitmaass ausgeführt. Wir bemerken, dass Weber in den Maassbestimmungen von 1878 schon eine Grösse  $u$  eingeführt hat, die unserer „Geschwindigkeit“ entspricht. Die Einheiten des obigen Maasssystems ergeben sich unmittelbar aus den Festsetzungen  $\epsilon = 1$   $k = 1$ , aus denen es hervorgegangen ist:

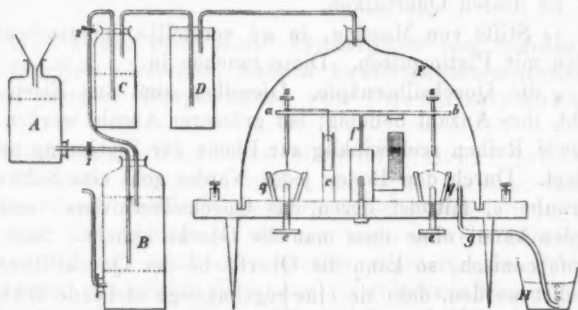
1. Die Zeiteinheit ist gemeine Secunde.
2. Die Längeneinheit (1 Sec. Länge) ist die Länge, welche mit der kritischen Geschwindigkeit in einer Secunde durchlaufen wird; ihr Zahlenwerth in gemeinen Einheiten ist gleich dem von  $c$ , wenn  $c$  in m/sec ausgedrückt wird.
3. Die Masseneinheit (1 Sec. Masse) ist die astronomische Einheit von Gauss, wohlverstanden mit Zugrundelegung der sub (2) definirten Längeneinheit, also diejenige Masse, welche einer anderen Masse in der Entfernung von  $c$  gemeinen Längeneinheiten die gemeine Beschleunigung  $c$  m/sec<sup>2</sup> ertheilt. Setzt man  $c = 300\,000\,000$ , die Beschleunigung der Erdschwere  $= 9,81$ , den Erdradius  $= 6\,370\,000$ , so wird  $M_1 = 67\,700\,000\,000$  Erdmassen.

Man erhält mit dem vorstehenden System eine Art von Erklärung für die Cohärenz der Gauss'schen Beziehung  $(M) = (L^3/T^3)$ , da diese in unseren Einheiten lautet  $(T) = (T^3/T^3)$ , also sichtlich identisch wird. Es ist nur consequent, zu behaupten, dass die Theorie der electrodynamischen Wirkungen dermaleinst eine Erklärung der Gleichung  $L = T$  liefern muss, so dass die vorstehenden Betrachtungen einmal einen heuristischen Werth erhalten könnten.



## XII. *Notiz über eine unter Wasserstoff arbeitende Wippe; von E. Budde.*

Bekanntlich ist es schwierig, eine electrische Selbstunterbrechung längere Zeit in geregelter Thätigkeit zu halten, weil die Oxydationsproducte, deren Bildung der Funke veranlasst, immer wieder die Unterbrechungsstelle verschmieren. Bedarf man eines Apparates, der mehrere Stunden ganz sicher arbeiten soll, so weiss ich bis jetzt kaum ein anderes Mittel, als fließendes Wasser über die Unterbrechung zu leiten, welches die oxydirten Theile fortschwemmt; das ist meist umständlich und manchmal nicht ausführbar. Ich habe deshalb versuchsweise einen Quecksilberunterbrecher herstellen lassen, der unter Wasserstoff geht, und glaube, ihn, nachdem ich die Probe gemacht, empfehlen zu können. Die kleine Mühe, einen Wasserstoffentwickler herzustellen, wird reichlich dadurch aufgewogen, dass man den einmal in Gang gesetzten Apparat stundenlang ohne Aufsicht lassen kann.



Den Aufriss der ganzen Vorrichtung zeigt beifolgende Figur, wobei die chemischen Geräthschaften der Raumersparniss wegen unverhältnissmässig verkleinert sind.

A. Unten tubulirte Flasche für verdünnte Schwefelsäure.

1. Quetschhahn; die bequemste Form ist die von Dittmar, eine in der Ruhelage geöffnete Feder, welche durch eine Schraubenmutter zusammengedrückt wird.

B. Entwicklungsflasche; unten eine Schicht Coaks, darüber das granulirte Zink; unten seitlicher Tubulus zum Ablassen der Sulfatlösung.

## 2. Quetschhahn.

C und D Waschflasche (concentrirte Schwefelsäure) und Trockencylinder (Natronkalk) nach Bedürfniss zu vermehren.

F. Glocke, unter der der Unterbrecher steht. Dieselbe steht in einer Rinne des Tischchens, welches den Unterbrecher trägt; sie wird mit Quecksilber oder (bequemer) mit Fett gedichtet. Die Oberseite dieses Tischchens und die Wände der Rinne sind, nachdem die Apparaththeile fest geschraubt worden, mit Wachs überzogen. Bei

G führt ein Glasröhrchen durch den Boden des Tischchens nach aussen, sodass das durchströmende Gas in ein Wassergefäss H geleitet werden kann. In diesem bleibt das Ende des Gummischlauches während der Versuchsdauer liegen.

Unter der Glocke ist

m der Electromagnet,

f die Feder des Wacklers,

ab dessen Querbalken,

ss Stifte von Messing, in ab verstellbar eingeschraubt, unten mit Platinspitzen. Diese tauchen in

q die Quecksilbernäpfe. Dieselben sind aus Eisen gedreht, ihre Anzahl beliebig; bei grösserer Anzahl werden sie in zwei Reihen rechtwinklig zur Ebene der Zeichnung angeordnet. Durch den Boden jedes Napfes geht eine Schwanzschraube e, mittelst deren das Quecksilberniveau verstellt werden kann, ohne dass man die Glocke abhebt. Sind die Näpfe conisch, so kann die Oberfläche des Quecksilbers so regulirt werden, dass sie eine regelmässige stehende Schwingungsfigur bildet.

c sind oben ausgehöhlte und mit Quecksilber gefüllte Säulen, deren eine zu jedem der Schraubenstifte s gehört (nur eine gezeichnet); ein von s kommender, isolirt über den Balken ab geführter Draht taucht so tief in das Quecksilber, dass er nicht herausgehoben wird, wenn der Wackler in Thätigkeit ist. Die c stehen seitlich von der Axe des Wacklers. Die Isolirung des Drahtes erlaubt Disjunctionsversuche.

Alle *c*, *q* und die Umspinnung des Magnets sind mittelst Drähten, welche durch das Holz des Tischchens geleitet und dann unter demselben hergeführt sind, mit ausserhalb der Glocke stehenden Klemmschrauben in Verbindung; letztere sind nicht gezeichnet.

Beim Gebrauch öffnet man erst beide Hähne 1 und 2 und lässt einen kräftigen Wasserstoffstrom durchgehen. Die in *H* aufsteigenden Blasen fängt man nach zehn Minuten in einem Probirgläschen auf und zündet sie an; wenn die Flamme ruhig in das Glas hinabbrennt, ist keine Explosionsgefahr mehr vorhanden; man schraubt dann den Hahn 1 soweit zu, dass nur noch ein schwacher Gasstrom erzeugt wird; unter diesem arbeitet man.

Ist der Gasstrom gut gewaschen und getrocknet, so ist das Quecksilber nach vierstündiger Arbeit noch blank. Unterbrechende Stimmgabeln können leicht analog behandelt werden. Es genügt, eine Schwanzschraube im Quecksilbergefass und die Wasserstoffglocke anzubringen.

### **XIII. Ueber eine neue Flüssigkeit von hohem specifischen Gewicht, hohem Brechungsexponenten und grosser Dispersion; von Carl Rohrbach.**

Nachdem zuerst im Jahre 1862 Graf F. Schaffgotsch<sup>1)</sup> eine Methode angegeben hatte, das spec. Gewicht fester Körper durch Schwebenlassen in einer Flüssigkeit zu bestimmen, und auch bereits auf die durch schwere Lösungen (er empfahl eine solche von saurem salpetersauren Quecksilberoxyd) ermöglichte Trennung verschiedener Mineralien<sup>2)</sup> hingewiesen hatte, schlugen Church<sup>3)</sup> und Thoulet<sup>4)</sup> an Stelle der durch ihren nothwendigen Gehalt an freier Salpetersäure in ihrer Anwendung beschränkten Schaffgotsch'schen Lösung eine solche von Kaliumquecksilberjodid vor; sie wiesen auch namentlich auf deren Verwendbarkeit zur

1) Schaffgotsch, Pogg. Ann. 116. p. 279 ff. 1862.

2) Schaffgotsch, l. c. p. 282.

3) Church, Min. Mag. 1877. p. 237.

4) Thoulet, Bull. de la Soc. Min. de France. p. 17-23. 1879.

mechanischen Trennung der Gesteinsgemengtheile hin, und Thoulet gab zu letzterem Zweck einen eigenen Apparat an.

V. Goldschmidt<sup>1)</sup> hat diese Lösung zum Gegenstand einer sehr eingehenden Untersuchung gemacht und als äusserste Grenze für deren spec. Gew.  $G = 3,196$  (Church 3,01, Thoulet 2,77) gefunden; gewöhnlich erreichte er jedoch nur 3,17.

Es folgte dann 1881 D. Klein<sup>2)</sup> mit seiner Lösung des Cadmiumborowolframat  $9\text{WoO}_3 \cdot \text{Bo}_2\text{O}_3 \cdot 2\text{CdO} \cdot 2\text{H}_2\text{O} + 16\text{aq}$ , welche ein Gewicht von 3,28 (im Sommer auch 3,3) erreicht. Bei  $75^\circ$  in ihrem Krystallwasser schmelzend, sollen die sorgfältig vorher getrockneten Krystalle dieser Verbindung eine Lösung von  $G = 3,3$ — $3,6$  liefern, doch bietet hier offenbar die Anwendung einer so hohen Temperatur grosse Schwierigkeiten; ausserdem wird diese Lösung durch Carbonate und Sulfide zersetzt, gestattet also auch in dieser Hinsicht nur eine beschränkte Verwendung.

Bei der grossen Aehnlichkeit der Doppelsalze, welche das Quecksilberjodid mit den Jodiden der Alkalien einerseits und mit denen der alkalischen Erden andererseits bildet, untereinander schien mir der Versuch lohnend, auch das Bariumquecksilberjodid zur Herstellung schwerer Lösungen heranzuziehen, für welche sich dann, für beide Salze gleiche Löslichkeit vorausgesetzt, ein noch höheres Gewicht als das der Thoulet'schen erwarten liess, entsprechend dem höheren Atomgewicht des Bariums gegenüber dem Kalium. Nachdem ein Vorversuch im hiesigen mineralogischen Institut ein sehr günstiges Resultat ( $G = 3,39$ ) geliefert hatte, stellte ich mit der bereitwilligst gewährten Erlaubniss meines verehrten Lehrers, des Hrn. Prof. G. Wiedemann, im physikalisch-chemischen Institut eine grössere Reihe von Versuchen über diesen Gegenstand an, deren Resultate ich mir im Folgenden mitzuthellen erlaube.

Bei der Darstellung der Lösung ist es nothwendig, bis zur vollständigen Bildung des Doppelsalzes sehr rasch zu verfahren, da das Jodbarium als solches sehr hygroskopisch ist und in Lösung sich überaus schnell an der Luft zersetzt. Ich habe folgende Methode am zweckmässigsten gefunden:

1) Goldschmidt, Neues Jahrb. f. Min. 1881, Beilagebd. 1. p. 179. auch als besondere Schrift erschienen.

2) Klein, Compt. rend. 93. p. 318. 1881 und Bull. de la Soc. Min. de France 4. p. 149. 1881.

100 Theile Jodbarium<sup>1)</sup> und ca. 130 Theile Jodquecksilber (*Hydrargyrum bijodatum rubrum* des Handels) werden rasch abgewogen und in einem trocknen Kochfläschchen gut durcheinandergeschüttelt, dann setzt man ca. 20 ccm destillirtes Wasser zu und bringt das Ganze in ein schon vorher auf ca. 150—200° erhitztes Oelbad; dabei wird die rasche Auflösung der Materialien und Bildung des Doppelsalzes durch fortgesetztes Umrühren mit einem krückenförmig gebogenen Glasstab, dessen oberes Ende man zwischen zwei Fingern dreht, möglichst beschleunigt. Wenn alles gelöst ist, lässt man noch kurze Zeit sieden, giesst die Flüssigkeit in eine Porzellanschale und dampft auf dem Wasserbade weiter ein, bis ein als Indicator eingelegter Epidotkrystall vom Sulzbachthale eben auf der Lösung zu schwimmen beginnt. Beim Erkalten scheidet sich eine kleine Quantität eines gelben Doppelsalzes aus, trotzdem aber nimmt das spec. Gewicht der Lösung infolge der Contraction bedeutend zu, sodass auf der kalten Flüssigkeit Topas schwimmt. Von dem ausgeschiedenen Doppelsalz trennt man dieselbe am besten, indem man sie mehrere Tage in einer verschlossenen Flasche stehen lässt und decantirt, oder man filtrirt mittelst Saugfilter und Platinconus. Doch erscheint dies, namentlich wo es sich um grössere Quantitäten handelt, wenig zweckmässig, da das Filtrirpapier durch die Lösung eine lederähnliche Beschaffenheit erhält und sich dann nicht mehr dicht an das Glas des Trichters anlegt; sehr gut filtrirt sich die Lösung dagegen durch Glaswolle.

Die so erhaltene Lösung von Bariumquecksilberjodid erreicht bei gewöhnlicher Temperatur ohne Schwierigkeit ein spec. Gewicht von 3,575—3,588; sie stellt eine vollkommen klare, sehr stark lichtbrechende Flüssigkeit von gelber Farbe dar, welche sich beim Erhitzen beträchtlich dunkler färbt (wohl infolge einer eintretenden Dissociation), bei ca. 145° siedet und mit den Wasserdämpfen rothes Quecksilberjodid abgibt, das sie übrigens heiss auch im Ueberschuss zu lösen vermag. Ihr Ausdehnungscoefficient ist (nach dem Verhalten des spec. Gew. zu schliessen) ein ziemlich grosser.

Die Brechungsexponenten für verschiedene Fraunhofer'sche Linien wurden bei einer Temperatur von ca. 23° aus

1) Als Bezugsquelle kann ich die chemische Fabrik von H. Trommsdorff in Erfurt sehr empfehlen.

den Minimalablenkungen bestimmt, und zwar einmal (a) in einem Steinheil'schen Hohlprisma vom brechenden Winkel  $60^\circ$ , ein zweites mal (b) an einem anderen Tage in einem solchen von  $10^\circ$  ( $H_{81}$ , Na,  $H_{\beta}$ ); es ergaben sich folgende Resultate, denen ich zur Vergleichung die entsprechenden Constanten einiger anderer Körper gegenüberstelle.

	C	D	E	F	$n_F - n_C$	$\frac{n_F - n_C}{n_D}$
Wasser $18,75^\circ$ . . . . .	1,3320	1,3336	1,3357	1,3380	0,0060	0,0045
Schwefelkohlenstoff $15,65^\circ$ . . . . .	1,6219	1,6308	1,6489	1,6555	0,0836	0,0207
Cassiaöl . . . . .	1,6979	1,6073	1,6207	1,6358	0,0979	0,0236
Faraday's Borsaures Bleiglas $G = 4,728$ . . . . .	1,7077	1,7148	1,7242	1,7325	0,248	0,0145
Thoulet's Kaliumquecksilberjodid $G = 3,112$ . . . . .	1,7014	1,7167	1,7391	1,7621	0,0607	0,0357
Dieselbe $G = 3,2$ . . . . .	—	1,733	—	—	—	0,0369
Bariumquecksilberjodid (a) $G = 3,564$ . . . . .	1,7755	1,7932	1,8265	—	—	—
(b) . . . . .	1,7752	1,7928	—	1,8488	0,0736	0,0409

$G$  und die folgenden Fraunhofer'schen Linien konnten wegen der im Violett bereits sehr starken Absorption nicht mehr gemessen werden, doch ergibt sich bereits aus der Tabelle, um wieviel die Dispersion dieser Lösung die der anderen aufgeführten Körper übertrifft, welche doch ihrerseits zu den am stärksten zerstreuen und, was die Flüssigkeiten anbetrifft, zu den am stärksten brechenden gehören; wenigstens ist es mir ebensowenig wie Goldschmidt<sup>1)</sup> gelungen, Angaben über Flüssigkeiten von noch höherem Brechungsindex zu finden.

Die Stärke der Dispersion zeigt sich namentlich deutlich in der ausnehmend scharfen Trennung beider  $D$ -Linien:

$$n_{D_1} = 1,7931, \quad n_{D_2} = 1,7933.$$

Die Differenz beider Ablenkungswinkel beträgt bei einem Prisma von  $60^\circ$  fast volle  $2'$ .

Der hohe Brechungsexponent, welcher selbst den des Arsenbromürs (1,78) übertrifft, dürfte die Lösung des Bariumquecksilberjodides in noch höherem Grade als die Thoulet'sche zur Bestimmung von Brechungsexponenten mittelst Totalreflexion geeignet erscheinen lassen.<sup>2)</sup>

1) Goldschmidt, l. c. p. 236.

2) Ich darf mir wohl an dieser Stelle erlauben, Hrn. Prof. E. Wiede-

Der Umstand, dass Jodbarium bereits durch den Kohlensäuregehalt der Atmosphäre rasch zersetzt wird, forderte eine genaue Prüfung des Verhaltens der Lösung gegen freie Kohlensäure, sowie gegen Carbonate. Ein während zwei Stunden durch dieselbe geleiteter Strom Kohlensäure brachte nicht die mindeste Veränderung in derselben hervor; ein Spaltungsstück von Calcit wurde zehn Tage in der Lösung gelassen, ohne dass seine Flächen im geringsten von derselben angegriffen worden wären, ebensowenig erlitt Kreidepulver in der gleichen Zeit irgend welche Veränderung. Dagegen zieht die concentrirte Lösung an der Luft ziemlich begierig Wasser an und wird daher zweckmässig in gut verschlossenen Gefässen aufbewahrt.

Ihre Hauptanwendung dürfte die Lösung in der specifischen Gewichtsbestimmung von Mineralien, sowie in deren Trennung finden; die wichtigsten derselben, welche im Gegensatz zu den anderen augenblicklich im Gebrauch stehenden schweren Flüssigkeiten durch dieselbe noch in den Kreis der Behandlung bei gewöhnlicher Temperatur gezogen werden, sind etwa folgende:

Axinit,  
Cyanit z. Th.,  
Epidot,  
die schwereren Glimmer,  
einige Granate,  
fast alle Hornblenden,  
Jade,  
Olivin,  
Orthit, excl. Allanit,  
Ottrelith,  
fast sämmtliche Glieder  
der Pyroxengruppe,

Saussurit,  
einige Spinelle,  
Staurolith z. Th.,  
die meisten Titanite,  
Topas und Pyknit,  
die schwereren Turmaline,  
Vesuvian,  
Zoisit.  
Unter den Gesteinen namentlich die Basalte.

Für mineralogische und petrographische Zwecke ist es natürlich nothwendig, dass die Lösung auf eine bestimmte Dichtigkeit eingestellt werden kann; dabei ist auf folgendes Rücksicht zu nehmen. Beim Vermischen mit Wasser bei

mann meinen besten Dank auszusprechen für das stets hülfsbereite Interesse, welches derselbe meiner Arbeit zuwendete, und seine mir namentlich beim optischen Theile derselben geleistete thätige Hülfe.



gewöhnlicher Temperatur scheidet die Lösung Krystalle von rothem Quecksilberjodid aus, die kalt nicht wieder gelöst werden, die Einstellung muss daher durch langsamen Zusatz einer verdünnten Lösung geschehen, welche letztere man sich herstellt, indem man zu der fast bis zum Sieden erhitzten Lösung unter Umrühren tropfenweise Wasser zusetzt, oder besser, indem man in einem Glase über die concentrirte Lösung vorsichtig eine Schicht Wasser bringt, worauf in einigen Stunden die Vermischung durch Diffusion ohne Auscheidung vor sich geht.

Die leichte Zersetzbarkeit der Lösung durch Wasser macht es nothwendig, dass man das Gesteinspulver stets vollkommen trocken in dieselbe eintrage, sowie, dass man beim Auswaschen desselben nach der Trennung zuerst einige Tropfen Jodkaliumlösung anwende, welche etwa ausfallendes Jodquecksilber in Lösung bringt. Ueberhaupt wird es zweckmässig sein, die leichteren (eisenfreien) Gemengtheile eines Gesteines von den schwereren und unter sich zunächst mittelst Thoulet'scher Lösung zu trennen (etwa bis  $G = 2,9$ ) und dann erst die schwereren einer Behandlung mit der Bariumquecksilberjodidlösung, und zwar möglichst in geschlossenen Apparaten (z. B. dem Thoulet'schen oder Harada'schen<sup>1)</sup>) zu unterziehen, da in offenen Gefässen die Lösung Wasser aus der Luft anzieht. Man vermeidet damit die Herstellung sehr verdünnter Bariumquecksilberjodidlösungen, die immer einige Schwierigkeiten bietet, und erspart das weite Eindampfen, bei welchem stets etwas Quecksilberjodid weggeht, welches dann, um die höchsten Dichtigkeiten wieder zu erreichen, wieder zugefügt werden muss.

Ich werde die Versuche mit dieser Lösung fortsetzen und eventuell gelegentlich darauf zurückkommen. Hoffentlich bewährt sich dieselbe in den Händen anderer als ein brauchbares Hilfsmittel physikalischer und petrographischer Forschung.

Leipzig, 11. Juli 1883.

<sup>1)</sup> Vgl. K. Oebbecke, 1. Beilageband z. Neuen Jahrb. für Min. 1881. p. 455.

#### XIV. Ueber die Rechtschreibung einiger aus dem Arabischen stammenden Ausdrücke der Vermessungskunde<sup>1)</sup>; von K. Zöppritz.

(Aus der Zeitschr. für Vermessungskunde 1833, Bd. 12, mitgetheilt vom Hrn. Verf.).

Zur Beförderung einer gleichförmigen und etymologisch richtigen Rechtschreibung scheint es mir zweckmässig, folgende Mittheilungen zu machen, deren drei erste ich vorzugsweise dem Arabisten, Hrn. Oberbibliothekar Dr. Rödiger verdanke.

*Azimut* ist das arabische *as-samt*, die Gegend oder der Punkt des Horizontes, sowie auch der vom Scheitelpunkt nach ihm gezogene Kreis.

*Zenit* ist dasselbe Wort ohne den Artikel, heisst aber vollständig *samt-ar-râs*, die Gegend des Kopfes, d. h. der Scheitelpunkt am Himmel. Das *h* am Ende, welches den beiden Worten vielfach zugefügt wird, entstammt wahrscheinlich dem Französischen und sollte andeuten, dass das *t* auch wirklich gehört werden muss. D'Abbadie jedoch, der selbst ein gründlicher Kenner der orientalischen Sprachen ist, schreibt in seiner *Géodésie d'Éthiopie* beide Worte stets ohne *h*. Im Deutschen vollends ist gar kein Grund vorhanden, diesen Buchstaben zuzusetzen. Er ist offenbar nur beibehalten worden, um den beiden Wörtern ein exotischeres Aussehen zu verleihen.

*Alidade*. Ueber dieses vielumstrittene Wort findet sich Folgendes in Dozy und Engelmann, *Glossaire des mots espagnols et portugais dérivés de l'Arabe*; Leyde 1869:

*Alidada* (*alhidada* dans les *Libros de Astronomia* d'Alphonse X, passim, chez Victor); *alhadida* (règle mobile dans l'astrolabe) est en arabe *al'idâda*. Les lexiques ne donnent à ce mot que les ens de „postis januae“ mais dans un traité arabe sur la construction de l'astrolabe (man. 193a, fol. 3) je l'ai trouvé dans sa signification technique, car on lit que c'est une espèce de „mastara“ ou règle.

Hiernach kann also kein Zweifel mehr bestehen, dass *Alidade* zu schreiben ist, denn der arabische Kehllaut 'ain, der oben durch den Apostroph ' ausgedrückt ist, pflegt im Deutschen gewöhnlich ganz weggelassen und nur ganz ausnahmsweise durch *h* wiedergegeben zu werden. Die Versuche einer Ableitung des Wortes von *hadâ* führen, leiten, beruhen demnach auf einer irrigen Voraussetzung.

1) Vgl. hierzu Zeitschr. f. Verm. 1880, p. 55, und 1833, p. 119.

*Theodolit.* Ueber dieses Wort finden sich in einem früheren Jahrgange dieser Annalen<sup>1)</sup> neben verschiedenen Proben etymologischer Equilibristik eine Reihe interessanter historischer Notizen bezüglich seines ersten Auftauchens. Diese Angaben fasst Weigand in seinem Deutschen Wörterbuch (2. Aufl. 1876) nach einer etwas misslungenen begrifflichen Erklärung des Wortes folgendermassen zusammen: „Instrument und Namen kommen zuerst im 16. Jahrhundert vor, und zwar in England, wo Leonard Digges in seinem von seinem Sohne Thomas Digges bedingten Werke „geometrical practice named Pantometria“ (London 1571 in 4<sup>o</sup>, neue Aufl. 1591) Cap. 27 von „the composition of the instrument called *Theodelitus*“ handelt und William Bourne in seinem Buche „treasure for travellers“ (1578) dasselbe Instrument, nämlich einen getheilten Kreis mit einem drehbaren Durchmesser, versehen mit Sehspalten (Dioptern) und horizontal gestellt, anfangs *alydeday*, dann aber mit Versetzung der Buchstaben stets *athelida* nennt, als wenn er jene mit lateinischer Endung versehene Benennung *theodelitus* oder engl. *theodelite* gar nicht kannte. Aber jene *athelida* und *alydeday*, welches letztere englisch geformt ist, gingen hervor aus dem geläufigen französischen *alidade*, ursprünglicher *alhidade* (nun folgt die bisher gebräuchliche Ableitung von *hadâ* führen). Ob nun jenes *theodelitus*, *theodelite* sich vielleicht mit Verschmelzung des vorgesetzten Artikels *the* bildete, ähnlich wie anscheinend das engl. *tother* der, die, das andere, aus *the other* entstanden ist? Denn gr. *θεῶς* *thai* = sehen, schauen, scheint im Anfange des Wortes nicht zu stecken, dessen unregelmässige Bildung zweifellos ist. Die Franzosen scheinen es in *théodolite* ungeformt zu haben, woher dann das Wort bei den Deutschen, welche *Theodolit*, latinisirt *theodolitus*, erst sehr spät gebrauchten, zumal da es weder 1716 bei Christian Wolff mathemat. Lex., noch bei Joh. Tobias Mayer in seinem 1777 erschienenen ausführlichen Unterricht zur praktischen Geometrie vorkommt.“ Die glückliche Vermuthung, dass das Wort durch Verschmelzung mit dem englischen Artikel entstanden sei, hat der treffliche, leider schon vor mehreren Jahren verstorbene Germanist mir mündlich noch mit viel mehr Sicherheit und Nachdruck ausgesprochen, als in seinem Wörterbuche, sodass an deren Richtigkeit kaum zu zweifeln ist. — Es sei noch hinzuzufügen gestattet, dass der Genitiv des Wortes *Theodolitis* lautet und nicht etwa *Theodoliten*, wie man noch hier und da liest.

1) Poggendorff, Pogg. Ann. 133. p. 192, 349. 1868.